This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

VALPERGA DI MASINO E DI CALUSO.

VIII. 299.

L



QA
35
.T374
1775

Bošković, Rudjer Josip

ELEMENTORUM UNIVERSÆ MATHESEOS

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH.

Societatis JESU

PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

TOMUS II.

CONTINENS

ALGEBRAM FINITAM.

EDITIO PRIMA VENETA

Summo labore ac diligentia ab erroribus expurgata.

VENETIIS, MDCCLVII.

APUD ANTONIUM PERLINI.

SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIIS.

W. W. Beman
5-25-1923

NOVA AUCTORIS PRÆFATIO.

HUjus etiam libri, magna itidem ex parte diſtracti; non vero recuſi; mutatur titulus, ut in primi tomi nova præfatione monui. In ea, quam ſuperiore anno huic ipſi libro præfixeram; & quæ adhuc retinetur applicationem Algebræ ad Geometriam daturum promiſeram ſecundo tomo. Tum enim exigebantur Elementa admodum compendioſa, quæ binis tomis includerent Matheſim puram, quorum ſecundus in prima parte contineret Sectiones Conicas, & quidquid ad Geometriam infinitorum, & infiniteſimorum, ac ad ſublimiores curvas pertinet, in ſecunda vero parte applicationem Algebræ ad Geometriam, & totam Infinitorum Analyſim compendiaria methodo pertractata: Nunc ubi ea omnia, quæ poſt primam Præceptoris inſtitutionem per ſe ipſe poſſit Tyro addiſcere, uberius explicata requiruntur, excreſcit tomorum numerus; licet rerum ordo ſervetur idem.

At ut iis etiam conſulatur, qui minus otii habent, ad ampliora volumina percurrenda, illud curabo, ut veritates quaſdam præcipuas inter ſe ſolas connectam; quæ proinde, omiſſis, vel in aliud tempus reſervatis reliquis, cognoſci poſſint. Id quidem præſtiti in Sectionibus Conicis, & in præfatione tertii tomi propoſui numeros illos paragraphorum, qui, reliquis omiſſis, legi poſſunt. Hic etiam in hiſce Algebræ Elementis ſublimiora quædam, vel minus neceſſaria ommittere poterit, qui feſtinare debeat, aut velit. Paragraphorum, qui legi debent, numeros hic ſubjiciam, & ubi binis numeris puncta interſeruntur, intermedii pariter omnes percurrendi ſunt;
1 ... 71; 84 ... 87; 95; 101 ... 107; 110 ... 127, 143 ... 174; 186 ... 202, 204 ... 209; 220, 221, 235 ... 254; 257; 258; 263 ... 275; 281 ... 284, 287 ... 290; 306; 330 ... 332; 335, 336, 342 ... 345

125905

345, 361 ... 368, 371, 383 ... 388, 391 ... 397, 413, 415.

In his numeris vix unquam habebitur eorum mentio, qui omittuntur, quæ ſi alicubi occurrit, ad ea, quæ ibi tradentur, non erit prorſus neceſſarium id, quod eo numero continebitur, ac ad uberiorem cognitionem facile ſupplebit voce Præceptor, quæ deſint. Porro in his, quæ hic propoſui, habentur præcipuæ algorithmi regulæ, elevatio binomii ad potentias, & ejus ope extractio radicis cujuſvis, proprietates præcipue æquationum, reſolutio æquationum primi, ſecundi, tertii, & quarti gradus, pro quibus ſolis habentur in Algebra generales regulæ. Si quærantur approximationes pro altiorum graduum æquationibus, percurratur §. quintusdecimus. Proderit autem, & ſextumdecimum, omnium poſtremum percurrere.

PRÆFATIO.

ALGEBRÆ Finitæ elementa hic tradimus ſine applicatione ad Geometriam. Applicationem ejuſmodi, ac infinitorum, & infiniteſimorum analyſim reſervamus tomo ſecundo. Tradimus autem primo quidem totius calculi fundamenta a primis ipſis, ac ſimpliciſſimis exorſi; nimirum ſignorum, notarumque uſum; additionem, ſubtractionem, multiplicationem, ac diviſionem; ubi ea, quæ ad potentias, ac radices pertinent, ac prima ſerierum rudimenta quædam perſecuti ſumus, ut & nonnulla de imaginariorum valorum natura ac uſu immiſcuimus nec inutilia ſane, nec injucunda. Tum æquationes aggreſſi earum naturam ac proprietates, & transformationes varias diligenter perſecuti, primum quidem reſolutionem æquationum primi, ac ſecundi gradus expoſuimus; tum in æquationibus gradus tertii, & quarti multo fuſius immorati profundioris inveſtigationis ſpecimen quoddam, & varia pluribus methodis inſtituta tentamina proponenda cen-

ſuimus, quibus Tyro jam aliquanto exercitatior ad profundiorem analyſim viam ſibi muniret: quibus abſolutis quod ad altiorum graduum æquationes reſolvendas pertinet per radicum limites, & approximationem non ita fuſe expoſuimus, adhuc tamen nec omninò curſim perſtriximus.

Et his quidem ipſa calculi elementa continentur. At ejuſmodi uſum in determinandis theorematis, & ſolvendis problematis, ſub finem multo diligentius perſecuti ſumus, exemplis pluribus illuſtrando methodos, ex quibus uberem ſane ſperamus Tyronis fructum. Illud unum monendum ducimus, licet omnem in eo operam collocaverimus, ut ſingula quàm maximè liceret, dilucidè exponeremus, adhuc tamen vivam Præceptoris vocem non utiliſſimam tantum, ſed etiam fere neceſſariam plerumque fore, cum raro admodum ejus indolis mentes producat natura, quæ in hæc velut adyta, & penetralia quædam irrumpant ſine ductore.

ELE-

ELEMENTA ALGEBRÆ.

§. I.

De notatione.

1. ALGEBRA ſignis quibuſdam utitur; & quantitates litteris exprimit.

2. Signum + ſignificat additionem, & dicitur poſitivum, — ſubtractionem, & dicitur *negativum* = æqualitatem. Ubi vero nullum habetur ſignum, intelligitur poſitivum, quod in quantitatibus ſolitariis, vel initio plurium terminorum pletumque omittitur. Ex. gr. $2+3=5$ legitur *duo plus tria æquantur quinque*: $5-2=3$ legitur *quinque minus duo æquantur tribus*.

3. Signum multiplicationis eſt ×, diviſionis lineola interpoſita diviſo ſcripto ſupra ipſam, & diviſori ſcripto infra. $3\times4=12$, $\frac{12}{4}=3$. Diviſio etiam ſcribitur interpoſitis binis punctis, ponendo 12 : 4 pro $\frac{12}{4}$, & multiplicatio aliquando, ſed raro admodum, interpoſito puncto, ſcribendo 3 . 4 pro 3×4. Sed cavendum ab æquivocationibus, cum eodem modo ſcribantur fractiones decimales poſt punctum.

4. Signum < ſignificat quantitatem præcedentem eſſe minorem ſequenti, contra ſignum >, eſſe majorem, $6<8$, $8>6$.

5. Signum ∞ ſignificat infinitum.

6. Signum radicis eſt √, quæ radix ſi fuerit qua-

drata, fere nihil addi ſolet, ſi cubica, quarta, quinta, &c., ponitur numerus exponens radicem, ut $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ &c. $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$. Radix prima alicujus quantitatis dici poteſt ipſa quantitas: $\sqrt[1]{3} = 3$.

7. Quando plures quantitates in unam ſummam colligendæ ſunt ita, ut ſignum præfixum afficiat ſimul omnes, adhibetur lineola ſuper omnes extenſa, vel parenthesis. $\overline{1+3} \times \overline{9-4}$; vel $(1+3) \times (9-4) = 4 \times 5 = 20$. $\sqrt{\overline{12+4+9}}$, vel $\sqrt{(12+4+9)} = \sqrt{\overline{25}} = 5$.

8. Quando primus terminus ita continet ſecundum, ut tertius quartum, quæ dicitur proportio geometrica, ſcribitur punctis hac forma interpoſitis illis quantatibus . : : ., vel : = : Eſſe 8 ad 4, ut 6 ad 3, ſcribitur 8 . 4 : : 6 . 3, vel 8 : 4 = 6 : 3. Secunda autem ſcribendi ratio fundatur in eo, quod ſi primus terminus continet ſecundum, ut tertius quartum, primus diviſus per ſecundum debet æquari tertio diviſo per quartum.

9. Quævis quantitatum genera litteris exprimuntur, & quidem, quæ cognitæ ſunt, ſolent exprimi prioribus *a*, *b*, *c* &c., incognitæ poſtremis *x*, *y*, *z* &c. numeri indeterminati, potiſſimum in potentiis, & radicibus exprimi ſolent intermediis *m*, *n*, *r*. Aliqui pro incognitis, ut paſſim Angli, vocales adhibent, pro cognitis conſonantes. Liberum eſt uti, quibus libet.

10. In multiplicatione facta per litteras omitti ſolet ſignum $\times$, & ſola conjunctio litterarum ſine ſigno multiplicationem ſignificat. Sit $a = 2$, $b = 10$, $c = 4$, erit $ab = 2 \times 10 = 20$, $abc = 2 \times 10 \times 4 = 80$.

11. Si eadem quantitas aliquoties addatur ſibi, ſive per aliquem numerum multiplicetur, quod idem eſt; præfigitur numerus, qui exprimat, quoties ſumitur.

$a + a$

$a + a + a + a = 4a$, & ſi $a = 3$, erit $4a = 4 \times 3 = 12$.

12. Si eadem quantitas a ſe ipſa ſubtrahatur, eliditur, & remanet cyphra o, ut $b - b = o$, $a + b + c - b = a + c$.

13. Si eadem quantitas per ſeipſam multiplicetur, apponitur poſt ipſam paulo ſupra numerus, qui exprimat, quoties ſcribenda eſſet: $aa = a^2$; $aaa = a^3$; $aaaa = a^4$. Cavendum, ne confundatur a^2 cum $2a$. Si $a = 5$, erit $a^2 = 25$, $2a = 10$. Si $b = 2$; erit $(a + b)^2 = \overline{a + b}^2 = 7 \times 7 = 49$.

14. Hinc ille numerus ſuprapoſitus eſt index, ſeu exponens potentiæ, poteſtatis, ſeu dignitatis quantitatis ipſius, & exprimit, quot vicibus unitas per illam quantitatem multiplicetur. Unitas autem exponens primæ potentiæ ſignari non ſolet; ut etiam in multiplicatione, & diviſione unitas omittitur. $1 \times a = a^1 = a$, $1 \times a \times a = a^2$, $1 \times a \times a \times a = a^3$ &c.

15. Hinc vero quævis quantitas ſi in exponente habeat o, exprimit unitatem, cum exprimat eam nunquam multiplicatam per illam quantitatem. Si ſit $a = 5$, $b =$, adhuc erit $a^0 = 1$, $b^0 = 1$.

16. Hinc rurſus ſi aliqua quantitas dividenda ſit per ſe ipſam, apponitur pro exponente cyphra o, vel ſcribitur unitas, vel ſi multiplicabatur per alias quantitates, omittitur. $\frac{a}{a} = a^0 = 1$; $\frac{abc}{b} = ab^0c = ac$; $\frac{abc}{bd} = \frac{ac}{d}$; $\frac{ab}{abc} = \frac{1}{c}$.

17. Si unitas dividenda ſit per aliquam quantitatem, vel per aliquam ejus potentiam, apponitur exponens potentiæ cum ſigno negativo, nec lineola diviſoria adhibetur: $\frac{1}{a} = a^{-1}$, $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$. Con-

tra

tra $\frac{1}{a^{-3}} = a^3$, cum nimirum ſignificet unitatem diviſam per fractionem $\frac{1}{a^3}$. Sit $a = 10$, $b = 2$, erit

$a^3 b^{-2} = \frac{1000}{4} = 250$.

18. In exponentibus adhibentur etiam fractiones, & numerator fractionis ſignificat potentiam quantitatis, ex qua radix extrahitur denominator exponentem radicis. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$; $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$;

$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $a^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$; $(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a+b)}$.

19. Aſſueſcat Tyro quantitatibus maximè compoſitis numeros ſubſtituere, incipiendo a ſimplicioribus. Sit $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$, $d = 10$, erit

$$\frac{a^2bc + bc^3}{bd + a^2} = \frac{9\times2\times5 + 2\times125}{2\times10 + 9} = \frac{90 + 250}{20 + 9} =$$

$\frac{340}{29}$. Sed $\frac{a^2bc}{bd} + \frac{bc^3}{2} = \frac{90}{20}\ \frac{250}{9} = 4\frac{1}{2} + 27 \cdot \frac{7}{9}$

$$= 32\frac{5}{18}; \left(\frac{ad^2 b^{-2} + b^4 c}{bc^{-1} + a^{-1} d}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\frac{300}{4} + 80}{\frac{2}{5} + \frac{10}{3}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{620}{4} : \frac{56}{15}\right)} = \sqrt{\frac{9300}{224}}\ \sqrt{} = 41 \cdot 51, \text{\&c.} =$$

6.44 &c.

§. II.

§. II.

De primis operationibus calculi litteralis in quantitatibus unico termino conſtantibus.

20. Quomodo fiat additio, ſubtractio, multiplicatio, diviſio quantitatum ſimplicium patet ex §. precedenti. Hic addendum, quod pertinet ad ſigna.

21. In aditione retinentur ſigna quantitatis utriuſque, quæ additur, & cui additur. In ſubtractione mutatur ſignum quantitatis ſubtrahendæ tantum in oppoſitum. In multiplicatione, & diviſione, ſi utriuſque ſigna ſunt conformia, nimirum utrumque ſimul poſitivum, vel utrumque ſimul negativum, apponitur producto ſignum poſitivum, ſive difformia negativum.

22. Quod ad additionem pertinet ſatis patet per ſe. In ſubtractione ſi ab a ſubtrahi debeat $b-c$, ſubtrahendo b nimis ſubtrahitur. Addendum igitur illud c, quod ſubtrahi non debuerat, & habebitur $a-b+c$. Sic ſi a num. 7 ſubtrahi debeat $5-2=3$, fiet $7-5+2=4$. Si autem ſit $b=0$, ſubtrahendo $-c$ ab a habebitur $a+c$.

23. Debeat autem multiplicari $a-b$ per $c-d$: Si multiplicetur per c fiet $ac-bc$: nam ac eſt juſto majus, cum debuerit multiplicari non totum a, ſed quantitas ea minor $a-b$, adeoque ab ipſo ac demendum bc. At præterea $a-b$ non debuit multiplicari per totum c, ſed per $c-d$. Demendum igitur a producto $ac-bc$ productum ex $a-b$ & d nimirum $ad-bd$, quo ablato, fiet $ac-bc-ad+bd$. Signa igitur conformia tum poſitiva, tum negativa dederunt ſignum poſitivum in ac, bd, difformia negativum in bc, ad. Sic ſi $7-3=4$ debeat multiplicari per $5-2=3$, fiet $5\times7-3\times5-2\times7+2\times3$, nimirum $35-15-14+6=12$. Et quidem ſi fiat $a=0$, $c=0$, fiunt ac, bc, $ad=0$, & $-b\times-d=+bd$, adeoque etiam ſolæ binæ quantitates negativæ per ſe invicem multiplicatæ exhibent ſignum poſitivum.

24. Por-

24. Porro tam in ſubtractione ſigni negativi, quam in multiplicatione binorum ſignorum negativorum, negando ſignum negativum, habetur poſitivum eo modo, quo qui negat carentiam alicujus rei; affirmat exiſtentiam ejuſdem.

25. Demum diviſio eſt deſtructio multiplicationis; adeoque ut iterum multiplicando redeat idem ſignum; debet in diviſione ſervari eadem lex; quæ in multiplicatione. $\frac{+8}{+2} = +4$, ne ſi potius ponatur -4, multiplicando deinde $+2 \times -4$ reddat -8 pro $+8$; $\frac{+8}{-2} = -4$, ne ſi ponatur potius $+4$, deinde $-2 \times +4$ redeat -8; $\frac{-8}{+2} = -4$, ne ſi ponatur potius $+4$, deinde $+2 \times +4$ reddat $+8$; $\frac{-8}{-2} = +4$, ne ſi ponatur potius -4, deinde -2×-4 reddat $+8$.

26. Hinc autem infertur, quotieſcunque concurrit numerus ſignorum negativorum par, haberi ſignum poſitivum, quotieſcumque vero impar, haberi negativum. Nam bina negativa poſitivum reddunt, tertium negativum cum poſitivo binorum reddit negativum, quartum negativum cum eo negativo conjunctum dat iterum poſitivum, & ita porro; poſitiva autem ſigna, quæ adſint, rem nihil turbant; nam conjuncta cum negativo relinquunt negativum, cum poſitivo poſitivum.

27. Quamobrem quadratum quantitatis tam poſitivæ, quam negativæ erit ſemper poſitivum, $+2 \times +2 = +4$, $-2 \times -2 = +4$: at cubus quantitatis poſitivæ erit poſitivus, negativæ negativus, cum tria in hoc concurrant negativa ſigna, in illo nullum. Quarta potentia iterum utrobique erit poſitiva, & generaliter quævis potentia quantitatis cujuſvis habens exponentem parem erit poſitiva, quævis habens imparem, exiſtente radice poſitiva, erit pariter poſitiva, exiſtente radice negativa, erit negativa.

28. Inde

28. Inde vero conſequitur radicem ſecundam, quartam, ſextam, &c. quantitatis negativæ eſſe impoſſibilem, cum nimirum quæcunque radix poſſibilis ſive poſitiva ſit, ſive negativa, exhibeat ſemper quamvis potentiam parem poſitivam. Ejuſmodi radices exponentis paris quantitatum negativarum dicuntur idcirco quantitates imaginariæ. Sic $\sqrt{-1}$ eſt quantitas imaginaria, non realis.

29. Porro in ſolutione problematum ſi devenitur ad quantitates imaginarias, ſignum eſt admodum manifeſtum vel problema eſſe impoſſibile, vel in ejus ſolutione adhibitam eſſe methodum, quæ aliquid impoſſibile requirat, prorſus ut ubi devenitur in argumentatione quavis ad abſurdum. Adhuc tamen frequens occurrit uſus ipſarum quantitatum imaginariarum, quia ubi ipſum problema poſſibile eſt, & impoſſibilitas involvitur inter ſolvendum, ſæpe impoſſibilitas ipſa deinde tollitur, ac eliditur pars illa impoſſibilis. Sic ſumma binarum quantitatum, quæ ex imaginariis, & realibus ſunt mixtæ realis eſſe poteſt, ut quantitatum $3+\sqrt{-1}$, & $8-\sqrt{-1}$ ſumma eſt realis, nimirum 11, & differentia, nimirum 5. Ac poteſt quantitatum mixtarum ex realibus, & imaginariis eſſe realis non ſolum ſumma, & differentia, ut hic, ſed & productum, & potentia aliqua: quod in potentia patet, cum quadratum ipſius $\sqrt{-1}$ ſit $=-1$ ex ipſa radicis notione: de multiplicatione, & potentia tertia patebit infra.

30. Infertur autem etiam illud, quantitatis cujuſvis radices ſecundas eſſe binas, alteram poſitivam, alteram negativam. Sic $\sqrt{4}=\pm 2$, nimirum vel poſitivum, vel negativum ſignum adhiberi poteſt, & radix quadrata ſemper ambigui valoris erit, quod attinet ad ſignum; ac idcirco ubi in ſolutionibus problematum obvenerit, ſemper binas exhibebit ſolutiones, cum utraque radix æquè idem quadratum habeat.

31. At radix exponentis imparis erit ſemper determinati valoris, poſitivi ſi quantitas ſit poſitiva, negativi, ſi negativa, nec niſi una radix realis ejuſmodi habebitur,

tur, cum quævis quantitas realis utcunque paulo minor; vel major potentiam generare debeat omnino minorem; vel majorem. Plures tamen imaginarios valores habere poterunt etiam radices gradus imparis, ut videbimus infra, cum quantitates compoſitæ ex realibus & imaginariis poſſint aliquando imaginarietatem deſtruere elevatæ ad potentiam imparem. Sed de eo ubi de compoſitarum quantitatum potentiis.

32. Jam vero ſi quantitates componantur ex numeris præfixis, & quantitatibus litteralibus prorſus ſimilibus, ſummantur, vel ſubtrahuntur ſoli numeri; adſcriptis ſummæ, vel differentiæ numerorum quantitatibus illis ipſis: & id quidem patet ex eo, quod idem eſt multiplicare unam quantitatem per aliam; ac eam multiplicare per omnes ejus partes alias poſt alias. $2a+3a=5a$, $5a-2a=3a$; $2a-5a=-3a$.

33. Si quantitates litterales ſint diſſimiles, adhibetur ſignum $+$, vel $-$ ſine ulla reductione. $3ab-5cd$ reduci non poteſt ad expreſſionem ſimpliciorem. Sed ſi adſit aliqua littera communis, ea poteſt ſeorſum poni, ſummatis, vel ſubductis reliquis per modum numerorum: $ac+bc=(a+b)c$, $abed-abfg=(ed-fg)ab$.

34. Si quantitates componuntur ex numeris; & litteris quibuſcumque, multiplicantur, & dividuntur ſeorſum numeri, & ſeorſum quantitates litterales. $3ac\times 5ab=15a^2bc$; $\frac{6a^2bc}{2a^2c}=3b$; $\frac{10a^2b}{6a^2c}=\frac{5b}{3c}$. Patet ex eo, quod quocunque ordine per ſe invicem multiplicentur aliquæ quantitates, productum ſimul omnium ſemper eſt idem.

35. Fractiones reducuntur ad eundem denominatorem, tum ſummantur, vel ſubtrahuntur prorſus; ut in Arithmetica; multiplicando tam denominatorem, quam numeratorem cujuslibet per denominatorem reliquorum;

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+\frac{adf}{bdf}+\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}.$$

36. Fractiones multiplicantur, ac dividuntur prorſus ut in Arithmetica, multiplicando in primo caſu nume-

rato-

ratores per ſe, & denominatores per ſe; in ſecundo multiplicando numeratorem diviſi per denominatorem diviſoris, & viceverſa denominatorem illius per numeratorem hujus, nempe multiplicando diviſum per diviſorem inverſum. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

37. Pro quantitatibus habentibus exponentem quantitatis habentur hi quatuor canones, qui profluunt ex ratione notandi potentias expoſitas §. 1, ac ex operationibus arithmeticis: 1. In multiplicatione earum quantitatum ſummantur exponentes: 2. In diviſione ſubtrahitur exponens diviſoris ab exponente diviſi: 3. In elevatione ad novam potentiam multiplicatur exponens præcedentis per exponentem novæ: 4. In extractione radicum dividitur exponens præcedentis per exponentem novæ: $a^2\times a^3=a^5$, quia $aa\times aaa=aaaaa$, & generaliter $a^m\times a^n=a^{m+n}$; $\frac{a^5}{a^2}=a^3$, quia $\frac{aaaaa}{aa}=aaa$; $\frac{a^2}{a^5}=a^{2-5}=a^{-3}$, quia $\frac{aa}{aaaaa}=\frac{1}{aaa}$; generaliter vero $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$; $(a^3)^2=a^{2\times3}=a^6$; quia $(a^3)^2=a^3\times a^3=a^6$; $\sqrt[2]{a^6}=a^{\frac{6}{2}}=a^3$, quia $\sqrt{a^6}=\sqrt{(a^3\times a^3)}=a^3$.

38. Hinc vero ope reductionis fractionum eruuntur plura circa quantitates radicales: ſunt autem hujuſmodi.

39. Si ex radice extrahenda ſit radix, multiplicantur exponentes. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[12]{a}$: quia $\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}}$, ac extrahendo radicem tertiam debet dividi per 3 exponens $\frac{1}{4}$ (per num. 37), qui ita diviſus evadit $\frac{1}{12}$ (per n. 36),

adeo-

adeoque $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{12}}$.

40. Inde autem eruitur, radicem quartam cujuſvis quantitatis habere quatuor valores, quorum bini ſunt ſemper imaginarii, & bini alii reales, vel imaginarii, prout quantitas fuerit poſitiva, vel negativa. Nam $\sqrt[4]{a} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}$, adeoque ob valorem radicis ſecundæ ambiguum, habebuntur valores quatuor $+\sqrt[2]{-\sqrt[2]{a}}$, $-\sqrt[2]{-\sqrt[2]{a}}$, $+\sqrt[2]{+\sqrt[2]{a}}$, $-\sqrt[2]{+\sqrt[2]{a}}$, quorum priores duo ſunt ſemper imaginarii, poſteriores autem erunt reales vel imaginarii, prout a fuerit valor poſitivus, vel negativus. Et eodem pacto generaliter $\sqrt[2m]{a}$, habebit duplum valorum numerum ejus, quem habet $\sqrt[m]{a}$, quorum ſaltem dimidium erit ſemper imaginarium, cum nimirum ſit $\sqrt[2m]{a} = \sqrt[m]{\pm\sqrt[2]{a}}$.

41. Si exponens & radicis, & quantitatis ſigno radicali affectæ multiplicetur per eandem quantitatem, valor manet idem; $\sqrt[2]{a^3} = \sqrt[8]{a^{12}}$, quia $\sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, & $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4} = \frac{12}{8}$, cum fractionis valor non mutetur, multiplicato & numeratore, & denominatore per eandem quantitatem quamcumque. Et eadem eſt ratio, ſi uterque contra dividatur per eandem quantitatem, quo pacto reducuntur ſæpe radicales ipſi ad ſimpliciores. $\sqrt[8]{a^{12}} = \sqrt[2]{a^3}$.

42. Radices diverſorum exponentium reducuntur ad eundem, ſi multiplicetur tam exponens alterius, quam quantitas eo radicali incluſa per exponentem radicis al-

terius.

terius. $\sqrt[2]{a^3}$, & $\sqrt[3]{a^5}$ reducuntur ad $\sqrt[6]{a^9}$, & $\sqrt[6]{a^{10}}$ quia $\sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$, ac reducendo $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ ad eundem denominatorem habetur $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$ (per n. 35); adeoque $a^{\frac{3}{2}}$, & $a^{\frac{5}{3}}$ reducuntur ad $a^{\frac{9}{6}}$, & $a^{\frac{10}{6}}$.

43. Radices ſi eiuſdem exponentis ſint, & eaſdem quantitates includant, ſummantur, vel ſubtrahuntur, ſummando, vel ſubtrahendo quantitates præfixas; $3\sqrt[3]{b} + 5\sqrt[3]{b} = 8\sqrt[3]{b}$; $5a\sqrt[3]{bc} - 3a\sqrt[3]{bc} = 2a\sqrt[3]{bc}$; ſi autem diverſos exponentes habeant, vel diverſas quantitates ſub ſignis, non uniuntur in unum terminum, niſi forte redactæ ad eundem exponentem etiam eandem quantitatem includant. $5\sqrt[4]{a^6 b^8} + 8\sqrt[6]{a^9 b^{12}} = 5\sqrt[2]{a^3 b^4} + 8\sqrt[2]{a^3 b^4} = 13\sqrt{a^3 b^4}$. Patet ex eo, quod radicalis terminus, ubi ſub ſigno radicali eadem quantitas continetur tractari debet eodem modo, quo tractaretur, ſi certa quadam littera exprimeretur.

44. Radices ſi ejuſdem exponentis ſint, utcunque diverſas quantitates includant, multiplicantur, & dividuntur, multiplicando, & dividendo quantitates ipſas; quia elevando ad eam potentiam, quam radix exprimit, invenitur eadem quantitas, quæ ſi ſigno multiplicationis conjunctæ fuiſſent eæ binæ radices. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$; quia elevando utrobique ad poteſtatem tertiam habetur $a \times b = ab$.

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ ob eandem rationem.

45. Inde autem eruitur, binas quantitates imaginarias invicem multiplicatas, poſſe efformare quantitatem rea-

realem: $\sqrt{-2} \times \sqrt{-8} = \sqrt{16} = \pm 4$. Videtur tamen hic notandum, ubi radix imagnaria elevatur ad ſuam potentiam, debere retineri ſignum negativum tantummodo, ex ipſa nimirum notione potentiæ, & radicis. Sic quadratum quantitatis imaginariæ $\sqrt{-1}$, debet eſſe determinatè -1, licet $\sqrt{-1}$, ſi conſideretur ut multiplicata per $\sqrt{-1}$, ex legibus multiplicationis reddat $\sqrt{+1} = \pm 1$. Nam $\sqrt{-1}$ ex ipſa notione radicis exprimit id, cujus quadratum eſt -1. Quamobrem ſi conſideretur elevatio ad ſecundam potentiam, videtur valor haberi debere determinatè pro negativo, ſi conſideretur multiplicatio, debere haberi pro ambiguo; nec mirum in quantitatis impoſſibilis uſu exlex quidpiam occurrere, & aliud videri multiplicare quantitatem per ſe ipſam, aliud elevare ad ſecundam potentiam, quæ duo in realibus quantitatibus idem ſonant.

46. Si radices diverſum exponentem habeant, reducuntur ad eundem (per num. 42), tum multiplicantur, vel dividuntur: $\sqrt[2]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{b^2} = \sqrt[6]{a^3 b^2}$; $\dfrac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{b^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^2}}$.

47. Hinc ſi extra ſignum radicale habeatur aliqua quantitas, poteſt includi ſigno radicali, multiplicando quantitatem incluſam per ejus potentiam ab exponente radicis expreſſam, cum quantitas non radicalis concipi poſſit ut radix prima ſui ipſius habens exponentem $= 1$, & reducatur ad radicalem ejuſdem exponentis. $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$; quia $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$. E contra ſi quantitas incluſa conſtet binis factoribus, e quorum altero radix illa extrahi poſſit; illa radix extracta poteſt poni ante ſignum radicale, relicta ſub eo altera. $\sqrt[3]{}$

$a^7 b = a^2 \sqrt[3]{ab}$, quia $\sqrt[3]{a^7 b} = \sqrt[3]{a^6 \times b} = \sqrt[3]{a^6} \times \sqrt[3]{ab} = a^2 \times \sqrt[3]{ab}$; $3\sqrt{50 a^5 c^3} = 15 a^2 c \sqrt{2 a c}$; quia $3\sqrt{50 a^5 c^3} = 3\sqrt{25 a^4 c^2 \times 2 a c} = 3\sqrt{25 a^4 c^2} \times \sqrt{2 a c}$ (per num. 44) $= 3 \times 5 a^2 c \times \sqrt{2 a c} = 15 a^2 c \sqrt{2 a c}$.

48. Inde autem quævis radix imaginaria poteſt reduci ad hanc formam $a\sqrt[2m]{-1}$, ubi a eſt valor realis. Si enim ſit $\sqrt[2m]{-b}$, & $-b$ exprimat quancunque quantitatem negativam, poſito $a^{2m} = b$; erit $\sqrt[2m]{-b} = \sqrt[2m]{-a^{2m}} = \sqrt[2m]{a^{2m} \times -1} = a\sqrt[2m]{-1}$

§ III.

De iiſdem operationibus in quantitatibus conſtantibus pluribus terminis.

49. In additione plurium quantitatum ſimiles ſingulis adduntur ita, ut ſi ſigna ſint conformia, addantur numeri præfixi, qui dicuntur coefficientes numerici: ſi ſint difformia ſubtrahatur numerus minor a majore; & apponatur ſignum numeri majoris: reliqui termini adjungantur cum ſuis ſignis. Proderit tamen ſimilium alias ſub aliis ſcribere, ut facilius colligatur ſumma.

50. Debeant addi hæ ſummæ, $8a^2 + 3ab - 4cd + 6ad$; $7a^2 + 4fg - 2ab - 8ad$. Scribantur hoc pacto

$$8\,a^2 + 3\,ab - 4\,cd + 6\,ad$$
$$7\,a^2 - 2\,ab \qquad - 8\,ad + 4\,fg;$$

$$15\,a^2 + ab - 4\,cd - 2\,ad + 4\,fg$$

51. In ſubtractione accipiantur omnes quantitates ſubtrahendæ, tanquam ſi haberent ſignum contrarium ei quod habent, & fiat ſumma cum legibus jam præſcriptis, Sic earumdem quantitatum differentia erit.

$$a^2 + 5\,ab - 4\,cd + 14\,ad - 4\,fg$$

52. In multiplicatione ſcribenda altera quantitas ſub altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per unum e terminis ſecundæ, ſcribendo productum in una linea, deinde tota prima quantitas per aliam, & ita porro, ſcribendo ſingula producta in ſingulis lineis, ac notando ſimiles terminos diverſorum ejuſmodi productorum alios ſub aliis: demum omnium linearum colligenda ſumma.

53. In proximè ſequenti exemplo prima & ſecunda linea continent quantitates, quæ per ſe invicem multiplicantur, tertia primam multiplicatam per $3\,a^2$, quarta eandem multiplicatam per $4\,ab$, quinta eandem per $2\,c$, ſexta ſummam tertiæ, quartæ, & quintæ.

54. Omnium verò hujuſmodi operationum patet ratio ex eo, quod hic ſumma, ſubtractio, multiplicatio fiant per partes, juxta methodum propoſitam pro quantitatibus ſimplicibus §. 21.

$$\begin{array}{l} 3a^2 + 3ab - c \\ 2a^2 - 4ab + 2c \\ \hline 6a^4 + 9a^3b - 3a^2c \\ \quad - 8a^3b \qquad - 12a^2b^2 + 4abc \\ \qquad + 4a^2c \qquad\qquad + 6abc - 2c^2 \\ \hline 6a^4 + a^3b + a^2c - 12a^2b^2 + 10abc - 2c^2 \end{array}$$

55. Poſſunt autem ope ſolius etiam ſummæ, ſubtractionis, multiplicationis plurima theoremata facile demonſtrari. Eſt theorema, cujus uſus ſæpiſſimè occurrit. Productum ſub ſumma, & differentia quantitatum æquatur differentiæ quadratorum ipſarum quantitatum: Sic ex. gr. numerorum 7, & 3 ſumma eſt 10; differentia 4, quorum productum 40, quadrata autem ſunt 49, & 9, quorum differentia pariter 40. Generaliter autem patet ſola multiplicatione ſummæ $a+b$ quantitatum a, & b, ac differentiæ earundem $a-b$. Facta enim multiplicatione habebitur $a^2 - b^2$.

56. Eodem autem pacto plurima alia demonſtrantur, ac fere omnia theoremata libri II. Euclidis, ut patebit in Applicatione Algebræ ad Geometriam atque hoc ipſum congruit cum quinta, & ſexta propoſitione ejus libri, ad quas facile traducitur.

57. In diviſione cavendum, ut tam quantitas dividenda, quam diviſa ordinentur ſecundum poteſtates cujuſdam litteræ ita, ut termini eandem illius litteræ poteſtatem continentes ſcribantur alii ſub aliis, & pro unico termino conſiderentur: tum primus terminus dividitur per primum, & notatur quotus ut in Arithmetica: multiplicatur totus diviſus per hunc quotum; ſubtrahitur hoc productum a diviſo; notatur reſiduum, cui adduntur reliqui termini quantitatis divi-

 den-

dendæ, & iteratur operatio eodem ordine uſque in finem.

$6a^4 + a^3 b - 12a^2 b^2$	$2a^2 + 3ab$ Diviſor
$+ 4a^3 c + 6a^2 bc$	$3a^2 - 4ab + 2ac$ Quotus

$6a^4 + 9a^3 b$

$-8a^3 b - 12a^2 b^2$

$+4a^3 c + 6a^2 bc$

$-8a^3 b - 12a^2 b^2$

$+4a^3 c + 6a^2 bc$

$+4a^3 c + 6abc$

0 . 0

58. Prima, & ſecunda linea diviſi continent diviſum ordinatum, per potentias litteræ a, ubi ſecundus & tertius terminus habent binas partes. Diviſor pariter ordinatur per potentias ipſius a. Dividendo $6a^4$ per $2a^2$ oritur $3a^2$ primus terminus quoti. Tertia linea continet diviſorem ductum in $3a^2$, quarta, & quinta reſiduum; dividentdo $-8a^3 b$ per $2a^2$ oritur $-4ab$ ſecundus terminus quoti; ſexta linea continet diviſorem ductum in $4ab$, ſeptima reſiduum; dividendo $4a^3 c$ per $2a^2$, oritur $2ac$ poſtremus terminus quoti; linea octava continet diviſorem ductum in $2ac$.

59. Si in quantitate dividenda deſint termini intermedi-

medii continentes potentias ejus litteræ intermedias, ſolent apponi ſtellulæ eorum loco.

$$\begin{array}{l|l} x^4 * -2a^2x^2 * +a^4 & x-a \\ \underline{x^4 - ax^3} & \overline{x^3+ax^2-a^2x-a^3} \\ \quad +ax^3 - 2a^2x^2 & \\ \quad \underline{+ax^3 - a^2x^2} & \\ \qquad -a^2x^2 & \\ \qquad \underline{-a^2x^2 + a^3x} & \\ \qquad\quad -a^3x + a^4 & \\ \qquad\quad \underline{-a^3x + a^4} & \\ \qquad\quad\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

60, Diviſionis ratio patet ex eo, quod fiat per partes prorſus ut in Arithmetica, ſubtrahendo ſemper e diviſo productum ex parte quoti inventa, & diviſore; Si nihil ſupereſt ex diviſione, ut in exemplis allatis, diviſio eſt perfecta, & quotus accuratus. Si quid ſuperſit, apponenda fractio, cujus numerator reſiduum, denominator eſt diviſor ipſe.

$$\begin{array}{l|l} x^3+3ax^2+3a^2x+2a^3 & x+a \\ \underline{x^3+ax^2} & \overline{x^2+2ax+a^2+\frac{a^3}{x+a}} \\ \quad +2ax^2+3a^2x & \\ \quad \underline{+2ax^2+2a^2x} & \\ \qquad +a^2x+2a^3 & \\ \qquad \underline{a^2x+a^3} & \\ \qquad\quad +a^3 & \end{array}$$

 61.

61. Quoniam in fine remanet a^3 appoſita eſt quoto fractio $\frac{a^3}{x+a}$

62. Poteſt autem etiam diviſio continuari per ſeriem infinitam, ut in arithmetica, concipiendo ſemper reſiduo additum o, ut in ſequenti exemplo.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + 2a^3 & x + a \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 + a x^2} & x^2 + 2ax + a^2 + \frac{a^3}{x} - \frac{a^4}{x^2} \ \&c. \\
\quad + 2ax^2 + 3a^2x & \\
\quad \underline{+ 2ax^2 + 2a^2x} & \\
\qquad + a^2x + 2a^3 & \\
\qquad \underline{+ a^2x + a^3} & \\
\qquad\qquad + a^3 & \\
\qquad\qquad \underline{+ a^3 + \frac{a^4}{x}} & \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{a^4}{x} & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{- \frac{a^4}{x} - \frac{a^5}{x^2}} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{a^5}{x^2} &
\end{array}$$

63. Hinc, ut e poſteriore exemplo patet; ſemper poteſt reduci in ſeriem quandam infinitam quæcumque fractio, ſive quotus proveniens ex quantitate quacunque ſimplici diviſa per quantitatem compoſitam ex quotcunque terminis. Conſideretur autem ſeries orta ex fractione $\frac{a}{b+c}$, in qua ſi c exprimat quantitates quotcumque, caſus hic ſimpliciſſimus extendetur ad denominatores utcumque compoſitos, quorum primum terminum exprimat b, reliquos omnes c.

$b+c$ Diviſor

Diviſus a | $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3}$ &c. Quotus

$$a + \frac{ac}{b}$$

$$- \frac{ac}{b}$$

$$- \frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2}$$

$$0 + \frac{ac^2}{b^2}$$

64. In hac ſerie termini progrediuntur ſemper in progreſſione geometrica, & ſemper decreſcunt, vel creſcunt, vel eandem quantitatem conſervant, prout primus terminus binomii b fuerit major, vel minor, vel æqualis ſecundo c. In primo caſu ſeries dicitur convergens, & ad verum quotientis valorem ſemper accedit magis in infinitum, ac eo citius convergit, quo fractio $\frac{c}{b}$ fuerit minor. In

ſecun-

ſecundo dicitur divergens, ac ſemper magis recedit, in tertio parallela, ac ſemper æquè diſtat a vero valore, Res patebit in Numeris.

65. Fractio $\frac{a}{b+c}$ ſit $=\frac{1}{3}$, & $a=1$, $b=2$, $c=1$. Subſtitutis his valoribus in quoto numer, 63, erit $\frac{1}{3}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$ &c. Primi duo termini ſimul continent $\frac{1}{4}$, tres primi $\frac{3}{8}$, quatuor primi $\frac{5}{16}$, qui quidem valores ſemper propius accedunt ad $\frac{1}{3}$ & quidem ſi ſigna alternantur, ut hìc, ſemper ubi additur alterius ſigni terminus, exceditur verus valor, ubi additur terminus ſigni oppoſiti, ab eo deficitur. Porro mutato valore b, & c, eadem, fractio poteſt redigi in ſeriem adhuc magis convergentem, ut ſi fiat $b=4$, $c=-1$, quo caſu erit $\frac{1}{3}=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c., in qua ſerie priores tres termini efficiunt $\frac{21}{64}$, quod ad $\frac{1}{3}$ accedit multo magis, quam $\frac{5}{16}$. Generaliter autem, quo fuerit b major reſpectu c, eo ſeries erit magis convergens.

66. Si autem fiat $\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}$, habebitur $a=1$, $b=1$, $c=2$, & ſeries $1-2+4-8$ &c., quæ ſemper a vero valore recedit magis, & eſt divergens.

67. Si demum fiat $\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, habebitur ſeries parallela $1-1+1-1$ &c.

68. P. Guido Grandi ſummus cæteroquin Geometra inde deduxit ſummam infinitarum nullitatum eſſe $=\frac{1}{2}$, quia $1-1=0$, iterum $1-1=0$, & ita porro $0+0+0$ &c. $=\frac{1}{2}$. Ad eodem jure licet

ſet dicere $-1+1=0$, $-1+1=0$ &c. adeoque $\frac{1}{2}=1+0+0$ &c., & proinde $\frac{1}{2}=1.\frac{1}{2}$ Sed ſeries divergentes, & parallelæ verum valorem non exhibent, nec ad ipſum accedunt.

69. Licet autem ſeries divergentes, & parallelæ verum valorem non exhibeant, adhuc uſui eſſe poſſunt, tum quia in parallelis, cum æque diſtent hinc inde, & ſigna alternent, unius termini dimidium exhibet valorem verum, divergentes autem ſi e finita quantitate oriuntur, ſæpe mutari poſſunt in convergentes; tum quia plurimæ ſeries ſummari poſſunt, ut eæ omnes, quarum termini progrediuntur in progreſſione geometrica. Eſt enim in iis, quemadmodum in progreſſionibus demonſtravimus Arith. c.3.n.9, ut differentia primi termini a ſecundo ad primum, ita hic ad totam ſeriem, quæ quidem ſumma in progreſſionibus divergentibus, & parallelis non exhibebit valorem ipſius ſeriei, ſed indicabit unde orta ſit. Sic in ſuperiore ſerie divergente $1-2+4-8$ &c., ſi fiat, ut $1-(-2)=1+=3.1::1.\frac{1}{3}$ habebitur fractio $\frac{1}{3}$, unde eas ſeries profecta eſt.

70. Porro ſerierum uſus in ſublimiore Matheſi frequentiſſimus eſt. Aliquis earum uſus nobis etiam hic paulo infra occurret.

71. An aliqua formula algebraica diviſorem aliquem habeat, & quos habeat diviſores, non ita facile determinatur in quantitatibus aliquanto plus compoſitis. In ſimplicioribus primo aſpectu diviſores ſimpliciores facile deprehenduntur. Illud autem generaliter in omni quantitatum genere habetur, nimirum ſi inveniantur omnes diviſores, aliorum multiplicatione non compoſiti, etiam productum ex binis quibuſvis, vel ex ternis, vel ex quaternis, & ita porro, fore diviſorem quantitatis ejusdem; productum autem ex omnibus exhibere quantitatem ipſam. Id autem patet ex eo, quod quocunque ordine eæ quantitates multiplicentur, debent demum

mum idem illud productum exhibere, ut diximus Arithm. cap. 1. num. 18, & in Appendice n. 125.

72. Quantitatis $abcd + bcde$ ſunt diviſores non compoſiti ex aliis b; c, d; $a + e$; idcirco ſunt etiam bc; bd, $ab + be$, cd, $ac + ce$, $ad + de$ compoſita ex binis, & bcd; $abc + bce$, $abd + bde$, $acd + cde$ compoſita ex ternis; & ipſa quantitas $abcd + bcde$ compoſita ex omnibus ſimul.

73. Pro inventione diviſorum in quantitatibus magis compoſitis, methodum eò magis implexam, quo quantitates magis compoſitæ ſunt, & quo diviſores quæruntur pluribus conſtantes terminis, exhibuit ſine demonſtratione Nevvtonus in Arithmetica Univerſali, quam a pluribus demonſtratam Tyro, cum aliquanto magis profecerit facile inveniet, ſi libuerit. Simpliciſſimi caſus ſpecimen aliquod hic exhibebimus uſui futurum infra.

74. Sit formula quædam, quæ contineat plures unius tantummodo litteræ potentias numeris conjunctas integris ita, ut altiſſima poteſtas nullum numerum præfixum habeat, quemadmodum eſt $x^3 - 2x^2 - 13x + 20$; & quæratur, an habeat aliquem diviſorem unius dimenſionis; adeoque hujus formæ $x + a$, exprimente a aliquem numerum:

75. Ponantur pro x alii poſt alios plures termini progreſſionis arithmeticæ decreſcentis per unitatem, inter quos ſit 0, ut 1, 0, $-$ 1. Colligantur diverſi valores totius formulæ reſpondentes his diverſis poſitionibus: adſcribantur iis omnes eorum diviſores: inter diviſores reſpondentes diverſis poſitionibus, qui omnes tam ut poſitivi, quam ut negativi conſiderandi ſunt; cum tam poſitive, quam negative accepti eandem quantitatem poſſint ſemper dividere, quæratur aliqua progreſſio arithmetica decreſcens per unitatem, cujus ſinguli termini ſumantur inter diviſores reſpondentes ſingulis poſitionibus: ejus progreſſionis terminus reſpondens poſitioni $x = 0$ ſumatur pro a, & per $x + a$ tentetur

divi-

diviſio, ac ſi non ſuccedat per ullum a ita inventum; erit impoſſibilis ejus formæ diviſor, qui ſi poſſibilis ſit, invenietur omnino.

76. In caſu formulæ $x^3 - 2x^2 - 13x + 20$, poſito 1 pro x, habetur $1 - 2 - 13 + 20 = 6$: poſito $x = 0$, habetur $0 - 0 - 0 + 20 = 20$: poſito $x = -1$, habetur $-1 - 2 + 13 + 20 = 30$. Ordinentur hi numeri cum ſuis diviſoribus, ut infra, ubi prima columna continet terminos progreſſionis arithmeticæ poſitos, pro x, ſecunda valores formulæ inde provenientes, quibus reſpondent ad latus omnes ipſorum diviſores.

1	6	1, 2, 3, 6
0	20	1, 2, 4, 5, 10, 20
−1	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

77. Conſiderando diviſores ipſos occurrunt tres progreſſiones decreſcentes per unitatem, 3, 2, 1; −1, −2, −3; −3, −4, −5, quarum primi termini reſpondent primæ poſitioni, ſecundi ſecundæ, tertii tertiæ. Aſſumptis harum progreſſionum terminis, qui reſpondent poſitioni $x = 0$, ac ſunt $+2$, -2, -4, tentanda diviſio per $x + 2$, $x - 2$, $x - 4$. Priores duæ non ſuccedunt, ſuccedit tertia, exiſtente quoto $x^2 + 2x - 5$. Quare unicum ejus formæ diviſorem $x - 4$ habet propoſita quantitas.

78. Demonſtratio methodi hinc petitur. Si formula quævis compoſita ex potentiis quantitatis x & numeris multiplicetur per $x + a$, & pariat aliam formulam, in qua pro x ſubſtituatur quivis numerus; valor totius hujus formulæ debebit habere inter ſuos factores valorem $x + a$. Ac proinde ſi pro x ponantur ſucceſſivè diverſi numeri alii aliis unitate minores, debet hic factor $x + a$ decreſcere per illam unitatem, per quam decreſcit x. Porro ubi ponitur $x = 0$, factor ille $x + a$ erit

—a

$= a$. Quare valor quæſitus a, debet inveniri, ſi habetur ullus, inter diviſores reſpondentes poſitioni $x=0$; ſed præterea debent inter præcedentium poſitionum diviſores inveniri numeri eodem valore a unitate majores; ac inter diviſores ſequentium debent inveniri minores pariter unitate; nimirum valor ille debet eſſe in progreſſione arithmetica decreſcente per unitatem; & excurrente per omnium poſitionum diviſores: Debet autem eſſe inter diviſores integros non fractos; nam, ut demonſtrabimus infra, nulla quantitas algebraica haberi poteſt, quæ multiplicata per $x + a$, exiſtente a numero fracto, formulam exhibeat omni fractione carentem, adeoque quæſitus numerus a non poteſt eſſe numerus fractus.

79. Ubi plures obveniunt diviſores, ut hic, quia tententur tot diviſiones, eæ, quæ evadunt inutiles, ſępe admodum facile excluduntur, aſſumpto pro x alio aliquo termino progreſſionis illius, ut hic facto $x=2$, quo caſu habetur valor formulæ $8-8-26+20=-6$. Inter hujus diviſores debet adeſſe terminus præcedens progreſſionem arithmeticam inventam inter cæterarum poſitionum diviſores uſui futuram: Porro progreſſionum $3, 2, 1; -1, -2, -3; -3, -4, -5$ termini præcedentes ſunt $4, 0, -2$, quorum priores bini non adſunt inter diviſores hujus novi valoris inventi, nimirum numeri 6, tertius autem adeſt: Quare priores binæ uſui eſſe non poſſunt, & relinquitur illa ſola, quam vidimus exhibere quæſitum valorem $x=-4$.

80. An binæ quantitates communem habeant diviſorem minus difficulter invenitur eadem ratione, quam pro numeris docuimus in Appendice Primæ partis num. 145. Dividitur nempe altera per alteram: tum ſi quod ſit reſiduum, dividitur per ipſum diviſor, & per novum reſiduum diviſor novus, atque ita porro, donec nullum reſiduum habeatur: ultimus autem diviſor, erit diviſor communis maximus. Demonſtrationem ibidem dedimus num. 146. & 147.

81. Sæpe tamen in formulis Algebraicis, ut diviſor

poſſit

poſſit dividi per reſiduum, oportet primos eorum terminos ita præparare, ut alter per alterum accuratè dividi poſſit ſine fractione. Id autem fit notando; qui factores primi termini diviſoris novi non habentur in primo termino novi diviſi; & ſi per eorum aliquem dividi poteſt totus diviſor; dividatur is totus per eum; ſin minus, multiplicetur totus diviſus per eos omnes, per quos dividi non potuerit diviſor; quod etiam obſervandum erit quotieſcumque nova quoti pars quæritur in ejuſdem diviſionis continuatione. Eo enim pacto diviſio ſemper fiet ſine fractione. Quod autem ea multiplicatio aut diviſio communis diviſoris inventionem non turbet ſatis conſtat ex iiſdem theorematis, ex quibus methodum pro numeris derivavimus citato loco. Nec verò ullum erit periculum, ne auferatur aliquis communis diviſor dum diviſor totus dividitur per factorem non communem etiam diviſo; vel addatur dum diviſus totus multiplicatur per factorem non communem toti diviſori. Res exemplo patebit magis.

82. Sint binæ formulæ $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$ & $5x^2 + 9x - 18$. Primus terminus primæ $2x^3$ non poteſt accuratè dividi per primum ſecundæ $5x^2$, cum inter factores illius deſit 5, nec per ipſum 5 dividi poteſt tota ſecunda quantitas. Multiplicetur igitur per 5 tota prima, ac habebitur tertia $10x^3 + 40x^2 + 10x - 60$, & idem erit quærere diviſorem communem primæ, & ſecundæ, ac quærere diviſorem communem hujus tertiæ, & ſecundæ. Diviſa autem tertia per ſecundam, quotus eſt $2x$; reſiduum $22x^2 + 46x - 60$, quod pariter in primo termino $22x$ non habet illum factorem 5, ut continuari poſſit diviſio; idcirco ducendum totum reſiduum in 5, unde habetur $110x^2 + 230x - 300$; tum idem dividendum per illud $5x^2 + 9x - 18$, & provenit quotus 22, ac

reſi-

reſiduum $32x + 96$. Per hoc reſiduum dividen dus eſſet ille diviſor $5x^2 + 9x - 18$; ſed quia primus ejus terminus $5x^2$, non habet inter factores 32, aut ullum diviſorem ipſius 32 & totum illud reſiduum $32x + 96$ dividi poteſt per 32, remanente $x + 3$, dividatur $5x^2 + 9x - 18$ per $x + 3$, & quoniam diviſio ſuccedit, exiſtente quoto $5x - 6$; diviſor ipſe $x + 3$, eſt communis diviſor maximus quantitatum propoſitarum; Et quidem ſi per ipſum dividatur $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$, habetur $2x^2 + 2x - 4$, & ſi per ipſum dividatur $5x^2 + 9x - 18$, habetur $5x - 6$.

83. Porro invento communi diviſore, fractiones poſſunt ſimpliciores reddi, dividendo numeratorem, & denominatorem per diviſorem communem, ſi quem habent. Sic dividendo utrobique per communem hunc diviſorem $x + 3$ fiet fractio.

$$\frac{2x^3 + 8x^2 + 2x - 12}{5x^2 + 9x - 18} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{5x - 6}$$

§. IV.

De potentiis, quantitatum conſtantium pluribus terminis.

84. Potentiæ eruuntur continua multiplicatione per radicem, quarum natura facilius cognoſcitur, ſi multiplicentur per ſe invicem quantitates $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$ &c. Hujuſmodi multiplicatio ſic procedit.

$$\begin{array}{l} x + a \\ x + b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x^2 & + ax & + ab \\ & + bx & \end{array}$$

$$x + c$$

$$\begin{array}{llll} \hline x^3 & + ax^2 & + abx & + abc \\ & + bx^2 & + acx & \\ & + cx^2 & + bcx & \end{array}$$

$$x + d$$

$$\begin{array}{lllll} \hline x^4 & + ax^3 & + abx^2 & + abcx & + abcd \\ & + bx^3 & + acx^2 & + abdx & \\ & + cx^3 & + bcx^2 & + acdx & \\ & + dx^3 & + adx^2 & + bcdx & \\ & & + bdx^2 & & \\ & & + cdx^2 & & \end{array}$$

85. Patet autem ex hujuſmodi multiplicatione primum terminum debere eſſe primam illam quantitatem x elevatam ad eam potentiam, quæ exprimit numerum quantitatum multiplicatarum per ſe invicem, quæ quantitas in ſequentibus terminis aderit elevata ad potentias inferiores. In ſecundo autem termino haberi cum ea ſummam illorum terminorum, a, b, c, d &c., in tertio ſummam productorum ex omnibus binariis, in quarto ex omnibus ternariis, in quinto ex omnibus quaternariis, & ita porro, ac ſemper in poſtremo productum ex omnibus.

86. Si jam omnes termini b, c, d &c. concipiantur

æquales eidem a, habebitur $x + a$ per ſe continuo multiplicatum, ſive habebuntur potentię binomii $x + a$; productum autem ex binario quovis erit a^2, ex ternario a^3, ex quaternario a^4, & ita porro. Quare eo valore ſubſtituto, quadratum binomii $x + a$ erit $x^2 + 2ax + a^2$, cubus $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ quarta poteſtas $x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$, & ita porro reliquæ potentiæ erui poſſunt.

87. In iis omnibus potentiis primus terminus erit ſolum eadem potentia potentię quantitatis x, poſtremus ſolum eadem potentia ſecundæ quantitatis a, in reliquis utraque quantitas habebitur ita, ut prioris poteſtas perpetuo decreſcat per unitatem, poſterioris creſcat. Præterea autem habebuntur numeri, quos etiam vocant uncias, qui facile inveniuntur generaliter, ſi conſideretur in ſecundo termino debere præfigi numerum ipſorum terminorum a, b, c, d &c., in tertio numerum binariorum, quæ ex iis conſtare poſſunt, in quarto omnium ternariorum, & ita porro. Si enim ii numeri generaliter inveniantur, invenientur illæ unciæ numericæ.

88. Jam vero ſi $x + a$ elevari debeat ad quamvis potentiam m, patet aſſumi debere litteras illas a, b, c, d &c. numero m; adeoque uncia ſecundi termini erit m, ſive $\frac{m}{1}$, quod idem eſt.

89. Si autem aſſumatur quivis numerus terminorum m, ſemper quicumque ex iis cum quovis alio præter ſe conſtituit binarium, adeoque conſtituit binaria $m - 1$; cumque ipſi termini ſint numero m, habebunt binaria $m \times (m - 1)$. Sed eo pacto quodvis binarium bis obveniet, ut binarium ab, & ba, cum nimirum conjungitur a cum b, & b cum a. Quare ad habendum numerum binariorum non ſimilium oportet ſumere

mere $\frac{m \times (m-1)}{2}$, ſive $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}$; & erit uncia tertii termini.

90. Quodvis binarium poteſt conſtituere ternarium cum quovis termino præter illos duos, ex quibus conſtat, nimirum ternaria $m-2$: Quare ternariorum numerus habebitur, ſi numerus binariorum multiplicetur per $m-2$. Sed quodvis ternarium ter prodibit idem, cum nimirum quivis e tribus terminis conjungitur cum reliquorum binario. Ac proinde numerus ternariorum diſſimilium habebitur, ſi numerus binariorum multiplicetur per $\frac{m-2}{3}$, eritque $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$; quæ erit uncia quarti termini.

91. Eodem pacto numerus quaternariorum erit $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$, & ita porro: Quare formula generalis pro elevando binomio ad quamvis potentiam m, erit

$$\overline{x+a}^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2}$$
$$+ \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^3 x^{m-3} \ \&c.$$

92. Hic autem primo obiter notari poteſt, haberi hic admodum facile, quot binaria vel ternaria, quæ dicimus *ambi*, *terni*; aut alie ejuſmodi combinationes habeantur in dato numero. Pro binariis factum ex binis poſtremis dividendum per factum ex binis primis, pro ternariis aſſumenda ſunt facta ex ternis; & ita porro. In numero 90 habentur binaria $\frac{90 \times 89}{1 \times 2} = 4005$, ternaria $\frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3} =$ 117480, quinaria $\frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} =$ 43949268. Sed hæc ad rem preſentem minus pertinent.

93. Notandæ ſunt deinde plures potentiarum proprietates, & ipſius formulæ generalis indoles. Ea formula ſemper abrumpitur in potentia m post numerum terminorum $m+1$. Nam uncia ſecundi termini habet m, tertii uncia addit $m-1$, quartus ſimus $m-2$, & ita porro. Quare terminus $m+2$: habebit $m-m=0$, & ſequentes omnes multiplicabuntur pariter per 0, & proinde evaneſcent. Adeoque quævis potentia habebit terminos $m+1$. Sic ſi pro m ponatur 2, uncia prima erit $\frac{2}{1}$, ſecunda $\frac{2}{1}\times\frac{2-1}{2}=\frac{2}{1}\times\frac{1}{2},=1$, tertia $\frac{2}{1}\times\frac{2-1}{2}\times\frac{2-2}{3}$, ſive $\frac{2}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{0}{3}=0$. At ſi ſit $m=3$, ſolum in quarta uncia $\frac{3}{1}\times\frac{3-1}{2}\times\frac{3-2}{3}\times\frac{3-3}{4}$ incipit adeſſe $3-3=0$. Formula igitur in quadrato abrumpitur poſt tertium terminum, in cubo poſt quartum, & quadratum habet tres, tertia potentia, ſeu cubus quatuor terminos, & ita porro.

94. Primus cujuſvis potentiæ m terminus erit ſemper x^m, poſtremus a^m & unciæ eorum, qui præcedunt poſtremum, erunt eædem, ac eorum, qui ſequuntur primum in eadem ab iis diſtantia. Sic in quinta potentia uncia termini penultimi erit $\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}=\frac{5}{1}$ eadem quæ ſecundi: ante penultima $\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=\frac{5\times4}{1\times2}$ eadem, quæ tertii, & ita porro.

95. Quadratum autem binomii $x^2+2ax+a^2$ continebit quadratum primi termini, bina producta ex primo, & ſecundo, ac quadratum ſecundi. Cubus

bus $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$; continebit cubum primi termini; triplum productum ex quadrato primi & ſecundo; triplum productum ex primo & quadrato ſecundi, ac cubum ſecundi; & ita porro ejuſmodi canones pro reliquis potentiis erui poſſunt.

96. Notandum præterea cubum quantitatis mixtæ ex reali, & imaginaria poſſe evadere realem. Quantitatis $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ cubus evadit $=+1$. Nam cubus $-1=-1$; tria quadrata $-1=+3$ ducta in $\sqrt{-3}$ ſunt $=3\sqrt{-3}$; quadratum $\sqrt{-3}=-3$, adeoque tria ejuſmodi quadrata ducta in -1 ſunt $=+9$; cubus $\sqrt{-3}=-3\sqrt{-3}$. Quare cubus $-1+\sqrt{-3}=-1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3}=8$, & cubus $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{8}{8}=1$. Ac ſimili pacto cubus $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3}}{8}=\frac{8}{8}=1$. Generaliter autem cubus $\frac{a(-1\pm\sqrt{-3})}{2}$ eſt a^3.

97. Inde vero eruitur cubi cujuſvis a^3 haberi radicem tertiam realem a, & præterea binas alias radices imaginarias $\frac{a(-1+\sqrt{-3})}{2}$; $\frac{a(-1-\sqrt{-3})}{2}$. Quare etiam $\sqrt[6]{a^6}$ habebit ſex radices, quarum binæ reales; quatuor imaginariæ; erit enim $=\sqrt[3]{\sqrt[2]{a^6}}=\sqrt[3]{\pm a^3}$; ac $\sqrt[3]{a^3}$, & $\sqrt[3]{-a^3}$ habe-

habebunt ſingulæ ſingulas radices reales & binas imaginarias.

98. Si autem elevandum ſit trinomium ad quamvis potentiam m, patet id fieri poſſe per eandem formulam $x+a$, dummodo primus e tribus terminis ponatur loco x, & reliqui duo loco a, eorum quadratum loco a^2 cubus loco a^3, & ita porro. Eodem pacto ad quadrinomia, & quævis polynomia progredi licet, ac ſeries etiam quævis infinita elevari pariter poterit ad potentiam indefinitam m, dummodo primus ejus terminus ponatur pro x, ac reliqui omnes pro a. Adeſt etiam methodus generalis elevandi infinitinomium, quod certa lege progrediatur, ad potentiam indefinitam m, inveniendo ſtatim quemlibet terminum, ſed hæc Tyronibus abunde eſt indicaſſe.

99. Illud unum addi poteſt, formulam generalem, qua binomium elevatur ad quamvis potentiam m, & quam demonſtravimus, pro caſu quovis, in quo m ſit numerus integer, & poſitivus, habere locum etiam ſi exponens poteſtatis ſit numerus negativus, quo caſu, ut vidimus, exprimitur diviſio, vel in quo m ſit numerus fractus, quo caſu exprimuntur radices. Demonſtratio tamen accurata ejus applicationis eſt multo operoſior, quam ut hic videatur inſerenda. Tyroni ſufficiet exemplum potentiæ cujuſvis habentis exponentem integrum, & poſitivum ex quo rite demonſtrato, per analogiam quandam tranſibit ad reliquos caſus.

100. Et quidem, quod pertinet ad exponentem negativum, ex applicatione formulæ $\overline{x+a}^{-m} = x^{-m} + \frac{-m}{1} a x^{-m-1} + \frac{-m}{1} \times \frac{-m-1}{2} \times a^2 x^{-m-2}$ &c. oritur etiam quotus illius fractionis $\frac{a}{b+c}$, quem §. 3. num. 63. eruimus per ſeriem $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} +$

ac2

$\frac{ac^2}{b^3}$ &c. Nam $\frac{1}{b+c} = \overline{b+c}^{\,-1}$. Quare ſi in formula $\overline{x+a}^{\,m}$ ponatur $x = b$, $a = c$, $m = -1$, erit $\frac{m}{1} = -1$, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} = \frac{-1}{1} \times \frac{-2}{2} = +1$, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} = \frac{-1}{1} \times \frac{-2}{2} \times \frac{-3}{3} = -1$, & ita porro, ac proinde $\overline{b+c}^{\,-1} = b^{-1} - b^{-2}c + b^{-3}c^2$ &c., ſive $\frac{1}{b+c} = \frac{1}{b} - \frac{c}{b^2} + \frac{c^2}{b^3}$ & demum $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3}$, & ita porro prorſus ut ſupra per diviſionem actualem fuerat inventum. Applicationis autem ad exponentes fractos uſum præſtantiſſimum videbimus binis ſequentibus §§.

§. V.

De radicibus earundem.

101. Extractio radicum oritur a conſideratione potentiarum. Ordiemur a radice quadrata. Ordinata quantitate propoſita ſecundum potentias cujuſpiam litteræ, extrahatur radix quadrata ex primo termino, & ſcribatur e regione ipſius, ac ejus radicis quadratum ſubtrahatur e quantitate propoſita, tum per duplum radicis jam inventæ diviſo primo termino reſidui quantitatis propoſitæ, & ſcripto quoto prope radicem jam inventam pro ſecundo ipſius radicis termino, multiplicetur is quotus per ſe, tum per duplum radicis antea inventæ, & ſubtrahatur id productum a reſiduo illo quantitatis propoſitæ. Primus terminus novi reſidui dividatur per duplum primi termini radicis jam inventæ, ſcribatur novus quotus in radice ipſa, ducatur in ſe, tum in duplum radicis totius prius in-

ventæ, fiat ſubtractio, ut prius, & ita porro pergatur ſemper donec vel nihil ſuperſit, vel per ſeriem quandam abeatur in infinitum.

102. Sit extrahenda radix quadrata e quantitate $y^4 + 2by^3 + b^2y^2 + 2cy + c^2$; Ordinata quantitate operatio inſtituetur, ut hic infra.

$$
\begin{array}{l|l}
y^4 + 2by^3 + b^2y^2 + 2bcy + c^2 & y^2 + by + c \\
y^4 \qquad\qquad + 2cy^2 & \\
\hline
\quad + 2by^3 + b^2y^2 + 2bcy + c^2 & \\
\qquad\qquad + 2cy^2 & \\
\quad + 2by^3 + b^2y^2 & \\
\hline
\qquad\qquad + 2cy^2 + 2bcy + c^2 & \\
\qquad\qquad + 2cy^2 + 2bcy + c^2 & \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

103. Nimirum extracta radice ab y^4 habetur y^2, cujus quadrato y^4 ſubtracto a quantitate propoſita; primus reſidui terminus eſt $2by^3$; quo diviſo per $2y^2$ habetur by, quod ſi ducatur in $2y^2$, & in ſe, fit $2by^3 + b^2y^2$; quo ſubtracto primus terminus reſidui $2cy$ diviſus per $2y^2$ relinquit $+c$, & eo ducto in $2y^2 + 2by$, & in ſe, ac facta ſubtractione nihil ſupereſt. Quamobrem radix quæſita eſt ipſa illa quantitas $y^2 + by + c$.

104.

104. In ſequenti autem exemplo progredi licet in infinitum. Verum hæc ſeries, quæ oritur ex extractione radicis plurimum differt ab illa, quæ ex diviſione oritur. Illa enim terminos habet in geometrica progreſſione diſpoſitos, ac proinde facile ſummari poteſt. In hac progreſſionis lex cito turbatur.

$$y^2 + b^2 \;\Big|\; y + \frac{b^2}{2y} - \frac{b^4}{8y^3} + \frac{b^6}{16y^5} - \frac{5b^8}{128y^7}$$

$$y^2$$

$$+ b^2$$

$$+ b^2 + \frac{b^4}{4y^2}$$

$$\frac{b^4}{4y^2}$$

$$- \frac{b^4}{4y^2} - \frac{b^6}{8y^4} + \frac{b^8}{64y^6}$$

$$+ \frac{b^6}{8y^4} - \frac{b^8}{64y^6}$$

$$+ \frac{b^6}{8y^4} + \frac{b^8}{16y^6} - \frac{b^{10}}{64y^8} + \frac{b^{12}}{256y^{10}}$$

$$- \frac{5b^8}{64y^6} + \frac{b^{10}}{64y^8} \text{ \&c.}$$

105. Demonſtratio methodi pendet a formula quadrati $\overline{x+a}^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Inventa enim aliqua radicis parte, quæ dicatur x, & ſubtracto ejus quadrato, ad inveniendam aliam a, primus terminus reſidui dividendus eſt per $2x$, cum debeat deinde poſſe ſubtrahi $2ax + a^2$. Ea ſecunda pars inventa ducenda eſt in $2x$ & in ſe, ut habeatur illud ipſum $2ax + a^2$ ſubtrahendum, quo nimirum ſubtracto poſt ſubtractum quadratum x^2 primæ partis, ſubtractum jam eſt quadratum totius ſummæ $x+a$. Eodem autem pacto progreſſus fit habendo ſemper pro x totam radicis partem jam inventam, & pro a novum terminum quæſitum, ac ſi nihil ſuperſit, detracto quadrato radicis inventæ, oportet ipſa quantitas inventa ſit radix quadrata quantitatis propoſitæ accurata, ſecus ad eam in infinitum acceditur, ubi reſidui termini in infinitum decreſcant, & ſeries ſatis convergat.

106. Hinc autem facile fit gradus ad extractionem radicis cubicæ conſiderata formula $\overline{x+a}^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$. Nimirum extracta radice ex primo termino, & ſubtracto cubo, dividendus eſt primus reſidui terminus per triplum quadratum prioris partis, nempe ob $3ax^2$ adhibendum pro inveniendo a, dividendus eſt per $3x^2$. Tum novus terminus ducendus in triplum quadratum radicis jam inventæ, deinde ejus quadratum in triplam ejuſmodi radicem, ac demum faciendus ejus cubus, & tota hæc ſumma ſubtrahenda: nimirum oportet ſubtrahere $3ax^2 + 3a^2x + a^3$. Generaliter autem pro radice m dividendus eſt primus terminus reſidui per potentiam $m - 1$ primi termini radicis jam inventæ ductam in m; ac ſi tota radix prius inventa dicatur x, ac nova pars exhibita ab eo quoto dicatur a, ſubtrahendum erit

$\frac{m}{1}$

$\frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^3 x^{m-3}$ &c. Exhibebimus exemplum radicis cubicæ tantummodo.

$$\underline{y^2 + by + c}$$

$$\begin{array}{l} y^6 + 3by^5 + 3b^2y^4 + b^3y^3 + 3b^2cy^2 + 3bc^2y + c^3 \\ \qquad\quad + 3cy^4 + 6bcy^3 + 3c^2y^2 \end{array}$$

$$\underline{y^6}$$

$$\begin{array}{l} + 3by^5 + 3b^2y^4 + b^3y^3 + 3b^2cy^2 + 3bc^2y + c^3 \\ \qquad\quad + 3cy^4 + 6bcy^3 + 3c^2y^2 \\ \underline{+ 3by^5 + 3b^2y^4 + b^3y^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + 3cy^4 + 6bcy^3 + 3b^2cy^2 + 3bc^2y + c^3 \\ \qquad\qquad + 3c^2y^2 \\ + 3cy^4 + 6bcy^3 + 3b^2cy^2 + 3bc^2y + c^3 \\ \underline{\qquad\qquad + 3c^2y^2} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

107. Radix cubica termini y^6 eſt y^2, cujus cubo ſubtracto, primus terminus reſidui eſt $3by^5$. Is diviſus per triplum quadratum y^2, ſive per $3y^4$ exhibet $+ by$ pro ſecundo radicis termino. Triplum quadratum ipſius y^2 ductum in by, eſt $3by^5$, triplum y^2 ductum

ctum in quadratum by eſt $3b^2\ y^4$, cubus by eſt $b^3\ y^3$. Quare ſubtrahendum $3by^5 + 3b^2\ y^4 + b^3\ y^3$. Primus terminus novi reſidui eſt $3cy^4$, radicis jam inventæ $y^2 + by$ quadratum habet pro primo termino y^4; ac diviſo illo $3cy^4$ per hujus triplum $3y^4$, remanet c pro poſtremo radicis quæſitæ termino. Triplum quadratum radicis $y^2 + by$ ductum in c eſt $3cy^4 + 6bcy^3 + 3b^2\ cy^2$, triplum ipſius $y^2 + by$ ductum in c^2 eſt $3c^2\ y^2 + 3bc^2 y$, ac ejus cubus c^3 quibus ſubtractis nullum jam habetur reſiduum.

108. Ubi autem reſiduum aliquod ſemper ſuperſit; poteſt continuari ſeries in infinitum. Poteſt autem, ut ſupra monuimus, adhiberi etiam ſeries illa generalis binomii elevati ad potentiam m, in qua facto $m = \frac{n}{r}$, pro $\overline{x+a}^{\,m} = x^m + \frac{m}{1} \times a x^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2\ x^{m-2}$ &c, habebitur $\overline{x+a}^{\,\frac{n}{r}} = x^{\frac{n}{r}} + \frac{n}{r}\ a x^{\frac{n-r}{r}} + \frac{n}{r} \times \frac{n-r}{2r} \times a^2\ x^{\frac{n-2r}{r}}$ &c.

109. Ejus formulæ ope, ſi ex quavis quantitate eruenda ſit radix quæcunque, tertia, quarta, quævis, primus ejus terminus ponatur pro x, ſumma reliquorum omnium pro a, 1 pro n, 3, 4 vel quivis alius radicis exponens pro r, & habebitur ſeries exprimens eam radicem; quæ ſeries nunquam abrumpi poterit, ſi $\frac{n}{r}$ ſit fractio; ipſum enim r non metietur illum numerum n, adeoque nullus terminus ſeriei $n - r$, $n - 2r$, $n - 3r$ &c. poterit eſſe $= 0$.

§. VI.

§ VI.

De applicatione earundem formularum ad extractionem radicum in numeris.

110. Radices in numeris extrahi poſſunt fere eodem pacto, quo eas in calculo litterali eruimus. Quæritur radix per partes. Inventa una parte, & ſubtracta ejus potentia, ad inveniendam partem novam inſtituitur diviſio, in radice ſecunda per duplam ipſam radicem, in tertia per triplum ejus quadratum, & generaliter dicta parte jam inventa x, invenienda a, radicis exponente m, fit diviſio reſidui per mx^{m-1} ad inveniendum a, tum efformatur per multiplicationem, in radice quadrata $2ax+a^2$ in cubica $3ax^2+3a^2x+a^3$, generaliter $\frac{m}{1}\times ax^{m-1}+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times a^2x^{m-2}$ &c.... $+a^m$. Sed natura numerorum ſe per decades excedentium quædam ſuppeditat ad faciliorem partium ſe ſuccedentium inventionem, qua ſubtractiones illæ fieri poſſint, ita ut nihil ſuperſit in fine, ubi radix accurata extrahi poteſt, ſuperſit autem quantitas in infinitum decreſcens, ubi non poteſt, & ſemper ad verum valorem accedatur, quantum licet. Sed methodus ipſa exemplis illuſtrabitur magis, quam præceptis.

111. In primis incipiendo a puncto diſtinguente numeros integros a fractionibus decimalibus, & procedendo retrorſum dividatur numerus propoſitus in claſſes quaſdam, quarum ſingulæ contineant tot notas, quot unitates habet exponens radicis, in radice quadrata binas, in cubica ternas, & ita porro; primæ autem claſſi relinquantur, quæ ſuperſunt, quotcunque fuerint, vel eodem numero, vel infra ipſum. Radix quæſita continebit totidem notas integrorum, quot fuerint eorum

rum claſſes. Si è num. 143877824. extrahenda ſit radix quadrata, dividendus erit in claſſes hoc pacto 1; 43,87,78,24. & debebit habere ipſa radix notas quinque: ſi extrahenda ſit radix quinta, dividendus erit in claſſes hoc pacto 1438 ; 77824. , & debebit radix ipſa habere notas duas. Fractiones autem decimales eodem pacto in claſſes dividuntur, incipiendo à puncto, & progrediendo a notis ſuperioribus ad inferiores: Numerus 143877·824 pro radice quadrata dividendus eſſet ſic 14;38;77.82,4, pro tertia ſic 143; 877: 824; & haberet in radice ſecunda integrorum notas tres, in tertia duas: claſſes autem decimalium adjectis cyphris quotcunque in infinitum continuari poſſunt.

112. Demonſtratio petitur ex eo, quod quævis potentia *m* unitatis conjunctæ cum quotcunque cyphris, multiplicat ipſum numerum cyphrarum per *m*. Potentia tertia numeri 100 habentis cyphras duas eſt 1000000, quæ habet cyphras $2 \times 3 = 6$. Hinc incipiendo a quadrato; quadratum numeri 10 eſt 100, numeri 100 eſt 10000, numeri 1000 eſt 1000000. Quare numerorum inter 0 & 10 unica nota conſtantium quadrata continentur inter 0 & 100, adeoque conſtant minus quam tribus notis; numerorum inter 10 & 100 conſtantium binis notis quadrata continentur inter 100 & 10000; adeoque conſtant notis pluribus quam binis; & paucioribus quam quinque; & ita porro. Numerorum autem inter 0 & 10 cubi ſunt inter 0 & 1000, numerorum inter 10, & 100 cubi ſunt inter 1000 & 1000000, adeoque pro quovis notarum numero *m* cubus debet habere numerum notarum, qui diviſus per ternas notas in claſſes, reddat numerum claſſium *m*; & eadem eſt demonſtratio pro altioribus potentiis, quæ non difficulter transfertur ad fractiones decimales; cum quadratum $\frac{1}{10}$ ſit $\frac{1}{100}$ cubus $\frac{1}{1000}$, quadratum $\frac{1}{100}$ ſit $\frac{1}{10000}$, cubus $\frac{1}{1000000}$ & ita porro.

113. Jam ad ipſas radices extrahendas habeantur præ-

mani-

minibus potentiæ numerorum unica nota conſtantium; quæ habentur in tabella ſequenti, quæ continuari poteſt quantum libet.

I.	II.	III.	IV.	V.
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049

114. Sit jam extrahenda radix quadrata numeri 178929. Eo diviſo in claſſes continentes binas notas; prima claſſis, quæ hic binas continet (poterat autem continere etiam unicam) eſt 17. Accipiatur ejus radix proxime minor, quoniam accuratam non habet, quæ ſi adeſſet, aſſumi deberet, ac eſt 4, quæ nimirum erit prima nota radicis quæſitæ. Notetur, ejuſque quadratum 16 ſubtrahatur a prima ipſa claſſe 17, ac propter reſiduum 1 ſcribatur claſſis ſecunda 89, ut fiat 189.

115. Secunda nota debet eſſe ejuſmodi, ut ex ipſo reſiduo aucto 189 detrahi poſſit ejus quadratum, ac duplum

duplum productum ex ipſa & prima parte, nimirum, ut dicta prima parte x, nota nova a, detrahi poſſit $2\,a$

$x+a^2$. Porro ex ipſa decadica numerorum natura unitates contentæ in parte præcedenti ſunt decies majores unitatibus contentis in nota nova adjicienda, & ad homogeneitatem reducuntur, ſi parti præcedenti addatur cyphra o. Quare debebit poſſe ſubtrahi productum ex nota nova, & duplo partis jam inventæ auctæ cyphra o, ac ipſius notæ novæ quadratum. Quæratur igitur quoties duplum radicis jam inventæ, & auctæ cyphra o, nimirum hic 80 contineatur in reſiduo illo aucto nova claſſe, nimirum in 189, ita tamen, ut ſuperſit pro quadrato ipſius numeri vicium, ut hic continetur bis, ac remanet 29, quod ſufficit pro 4, quadrato numeri vicium 2. Numerus hic 2, hoc pacto inventus, erit ſecunda nota radicis quæſitæ. Ducatur in duplum primæ partis inventæ, & auctæ cyphra o, nimirum in 80, & habebitur 160, aſſumatur ejus quadratum 4, ac ſumma utriuſque 164 dematur ab illo reſiduo 189, ut habeatur novum reſiduum 25, prope quod notetur poſtrema claſſis 29, ut fiat 2529.

116. Eodem pacto ſequens nota invenietur quærendo quoties duplum partis jam inventæ 42, & auctæ cyphra, nimirum 840 contineatur in novo reſiduo 2529, ita tamen, ut ſuperſit pro quadrato hujus numeri vicium, ut hic continetur ter, ac ſuperſunt 9, quod ſufficit pro quadrato numeri 3. Hic numerus, hoc pacto inventus, erit nova nota radicis quæſitæ, quo ducto in duplum illud 840, unde proveniet 2520, ac aſſumpto 9 quadrato ipſius 3, demitur 2520+9, ſive 2529 a reſiduo illo aucto nova claſſe, quod cum pariter fuerit 2529 ita, ut nihil ſuperſit, nec aliæ claſſes reliquæ ſint; radix inventa 423 eſt accurata radix numeri propoſiti.

117. Si autem aliquod reſiduum ſupereſſet, & aliæ adeſſent claſſes, continuanda eſſet operatio, inveſtigando

do ſemper, quoties duplum partis jam inventæ auctum cyphra o contineatur in reſiduo aucto nova claſſe ita tamen, ut ſuperſit pro quadrato ipſius numeri vicium, tum ſumma producti ex numero ipſo vicium, & parte radicis jam inventa, ac quadrati numeri ejuſdem detrahenda a reſiduo ipſo aucto illa nova claſſe, & ſi aliquod reſiduum haberetur demum, ubi claſſis nulla ſupereſt; adjectis binis cyphris ipſi reſiduo, ſive binis decimalibus; ſi decimales fractiones adfuiſſent in numero propoſito; progreſſus fieret ad decimales fractiones radici addendas.

118. Methodus univerſa innititur formulæ $\overline{x+a}^2 = x^2 + 2ax + a^2$, & decadicæ numerorum naturæ; redacta ſemper parte jam inventa ad homogeneitatem cum invenienda per additionem cyphræ o. Sed ipſa hæc numerorum, quibus utimur, natura decadica; ut diximus compendia quædam ſuppeditat.

119. In primis cyphræ adjectio omitti poteſt, & res eodem redibit, ſi quæratur quoties duplum partis radicis jam inventæ contineatur in reſiduo aucto nova claſſe, ſed mulctato poſtrema nota, ita tamen; ut quod ſupereſt conjunctum cum nota omiſſa ſufficiat pro quadrato notæ quæſitæ. Idem enim eſt quærere quoties 80 contineatur in 189, & videre an reſiduum 29 ſufficiat pro 4 quadrato numeri vicium 2, ac quærere quoties 8 contineatur in 18, & videre, an reſiduum 2 conjunctum cum nota 9, ſive idem illud 29 ſufficiat pro quadrato 2. Satis igitur erit ſemper ſupra partem radicis jam inventam ſcribere ejus duplum, & reſiduum auctum nova claſſe, ſed mulctatum poſtrema nota dividere per hoc duplum, ita tamen, ut reſiduum habitum pro decadibus, & conjunctum cum nota omiſſa ſufficiat pro quadrato numeri vicium: ac pariter ſatis erit ipſum numerum vicium ducere primum in ſe, tum in illud duplum, & productum ex utroque ſimul conjuncto ſubtrahere, cum idem ſit ducere 2 in 80+2, ac ducere in 82.

120. Demum ubi jam plures radicis notæ inventæ ſunt, nimis prolixa, & moleſta eſt inveſtigatio numeri vicium, quo ejus duplum continetur in illo reſiduo ita, ut ſuperſit pro quadrato novæ notæ. Plerumque autem cum nova illa nota partem contineat ex ipſa numerorum natura multo minorem parte jam inventa, quod ſupereſt in illa inveſtigatione numeri vicium ſufficit etiam pro quadrato notæ novæ. Quare ſatius eſt in inveſtigando, quoties illud duplum contineatur in illo reſiduo mulctato illa poſtrema nota, conferre primas illius binas notas tantummodo cum primis binis, vel ternis hujus, prout in hoc habebuntur totidem notæ, quot in illo, vel plures, nec quidquam cogitare de reliquis, ac de quadrato novæ notæ. Si enim forte reſiduum non ſufficerit, patebit id ipſum ex eo, quod productum ex nota nova in ſe, & in duplum illud erit majus reſiduo ipſo, à quo ſubtrahi deberet, & eo caſu aſſumenda erit nota nova unitate minor, & iteranda multiplicatio. Satius enim erit aliquando oprationem iterare, quod raro eveniet, quam ſemper moleſtam illam reſiduorum inveſtigationem inſtituere.

121. Atque hinc quidem patent, quæcunque in Arithmetica propoſuimus pro praxi extrahendæ radicis quadratæ, quorum ſingulorum rationem hinc depromptam facile admodum Tyroni Præceptor indicabit; quam nimirum ibi omiſeramus reſervatam in hunc locum.

122. Pro radice cubica methodus eſt admodum ſimilis, & innititur iiſdem principiis. Extrahenda ea ſit e numero 143877824. Eo diviſo in claſſes per ternas notas, incipiendo a fine, prima claſſis, quæ poterat etiam continere unicam notam, vel binas, continet notas tres 143. Quæratur hujus radix cubica proxime minor, cum accurata non adſit, eritque 5, quæ erit prima nota radicis quæſitæ. Hujus cubus 125 ſubtrahatur a prima claſſe 143, & prope reſiduum 18 ſcribatur ſecunda claſſis 877, ac habebitur 18877.

123. Addita jam parti inventæ 5 cyphra 0, fiat ejus

qua-

quadratum 2500, quod triplicetur, quæraturque, quot vicibus hoc triplum quadratum 7500 ingrediatur in illud reſiduum auctum 18877 comparando pariter primas notas tantum. Hic habebitur 2, quæ erit ſequens radicis nota, ſi modo triplum quadratum partis inventæ & auctæ cyphra o ductum in ipſam notam novam, cum triplo hujus quadrato ducto in ipſam primam partem, ac una cum ejuſdem notæ cubo, nimirum illud $3a$

$x^2 + 3a^2 x + a^3$, non fuerit majus reſiduo, quo caſu minuenda eſſet unitate nota inventa, donec deveniretur ad ejuſmodi trium quantitatum ſummam non majorem reſiduo ipſo. In exemplo adducto ducatur illud triplum quadratum 7500 in hanc notam 2, & habebitur 15000, tum triplum hujus quadratum 12 in primam partem radicis 50, & habebitur 600, ac demum capiatur ejus cubus 8 e tabella, & colligatur ſumma horum trium numerorum 15000 + 600 + 8 = 15608; & quoniam hæc ſumma non eſt major illo reſiduo aucto 18877; nota hæc nova adſcribatur radici jam inventæ 5, & hæc ſumma detrahatur ab illo reſiduo, ac habebitur 3269, cui adſcripta claſſe ſequenti 824, novum reſiduum auctum jam erit 3269824,

124. Iterum addita toti parti jam inventæ 52 cyphra o, factoque ejus quadrato 270400, quæratur quoties ejus triplum 811200 ingrediatur reſiduum novum auctum 3269824, & comparando ſolas priores notas invenitur 4. Ducto 4 in illud triplum quadratum 811200 habetur 3244800: ejuſdem 4 triplum quadratum 48 ducatur in partem radicis jam inventam auctam cyphra 520, & habebitur 24960, capiatur demum 64 cubus ipſius 4, & quoniam eorum trium numerorum ſumma 3269824 non eſt major reſiduo illo, quod pariter erat 3269824, ipſa illa nota 4 erit adſcribenda radici. Cum vero è ſubtractione ejus ſummæ a reſiduo nihil ſuperſit & nulla alia adſit claſſis deprimenda; ipſe numerus 524 eſt accurata radix cubica numeri propoſiti. Si quid ſupereſſet liceret ternis adjectis cyphris progredi ad no-

 tas

tas decimales per approximationem eadem ſemper methodo.

125. Pro altioribus radicibus methodus eſt prorſus eadem; ſed pro quinta ex: gr:, diviſo numero in claſſes conſtantes quinis notis, extracta radice vera, vel proximè minore primæ claſſis, ſubtracta quinta potentia, & adſcripta ſequenti claſſe prope reſiduum, oporteret partis inventæ, & auctæ cyphra 0 efformare quartam potentiam, tum per quartæ potentiæ quintuplum dividere reſiduum illud auctum, & cum formula quintæ potentiæ $x + a$ ſit $x^5 + 5ax^4 + 10a^2 x^3 + 10a^3 x^2 + 5a^4 x + a^5$, oporteret quintuplum quartæ potentiæ partis jam inventæ, & auctæ cyphra ducere in notam novam, decuplum tertiæ potentiæ illius in ſecundam hujus, decuplum ſecundæ illius in tertiam hujus, quintuplum illius in quartam hujus, ac aſſumere quintam hujus potentiam, & ſummam horum quinque numerorum detrahere ab illo reſiduo aucto, ſi liceret; & ita generaliter pro diviſore ad inveniendam novam notam radicis m adhibere oportet mx^{m-1}, dicta x parte jam inventa, tum detrahere $\frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2}$ &c. .... $+ a^m$; dicta a nota inventa.

126. Porro in diviſione adhibetur tantummodo mx^{m-1}, quia eo pacto reſiduum omnium ſufficiet pro ſubtractione primi termini max^{m-1}: Is autem eſt multo major reliquis omnibus ſimul ſumptis, potiſſimum ubi jam x conſtat pluribus notis, ac ex ipſa decadica numerorum natura pluribus vicibus ſuperat ipſum a, ut in radice quadrata monuimus. Quamobrem plerumque, quod ſupererit primo termino, ſufficiet pro reliquis; ac ſi forte non ſuffecerit, id ipſum indicabitur ab illa ſumma ſubtrahenda, quæ ipſo reſiduo major obveniet, & remedium notæ minuendæ eſt admodum in promptu.

127. Ubi exponens radicis eſt numerus diviſibilis in duos factores, ſatius eſt extrahere prius radicem expoſitam ab altero, tum ex ea radice jam extracta extrahere radicem ab altero expoſitam. Sic ſi radix quarta extrahenda ſit, ſatius eſt extrahere prius radicem ſecundam, tum ex ea iterum ſecundam: ſi ſextam oporteat extrahere, ſatius eſt extrahere prius tertiam, tum ex ea ſecundam.

128. Hæ quidem methodi ad radicem omnino perducunt vel accuratam ſi adſit, vel proximam: at quo plures notæ jam inventæ ſunt, & quo altiores radices oporteat extrahere, eo magis creſcit labor in immenſum. Multo expeditiores habentur methodi, & quæ multo citius convergunt, ſed innituntur altioribus fundamentis. Unam hic addemus, quæ profluit ex formula binomii $x+a$ elevati ad potentiam indefinitam, & tranſlati ad potentias fractionarias, ſive ad radices.

129. Formula erat $x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m}{1} + \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2} \times \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^3 x^{m-3}$ &c. In ea patet, quemvis terminum ſequentem componi ex præcedenti, adjecto unciæ numericæ uno ex terminis ſeriei $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$ &c., adjecta exponenti a unitate, & ablata ab exponente x. Secundus terminus continet primum ductum in $\frac{m}{1} \times \frac{a}{x}$ tertius ſecundum ductum in $\frac{m-1}{2} \times \frac{a}{x}$, & ita porro.

130. Hinc ſi ponatur P pro x, PQ pro a, adeoque Q pro $\frac{a}{x}$ totus primus terminus dicatur A, ſecundus B, tertius C &c., habebitur ſequens formula.

$$\overline{P+PQ}^{m} = P + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} \times CQ$$

&c.

&c. Poſito autem $\frac{1}{r}$ pro m habebitur $\overline{P+PQ}^{\frac{1}{r}} = P^{\frac{1}{r}}$ $+\frac{1}{r}AQ+\frac{1-r}{2r}BQ+\frac{1-2r}{3r}CQ$ &c.

131. Hæc formula applicabitur numeris ita, ut aſſumatur aliqua potentia accurata ejus exponentis, cujus radix quæritur, proxima numero propoſito; quæ dicatur P: ea ſubtracta a numero propoſito; reſiduum dicatur PQ, quod erit poſitivum, vel negativum, prout potentia aſſumpta fuerit minor, vel major numero propoſito: ipſo autem reſiduo PQ diviſo per potentiam aſſumptam P, habebitur valor Q pariter poſitivus, vel negativus, qui eo erit minor, quo potentia aſſumpta fuerit propior numero propoſito. Jam vero in ipſa formula primus terminus $P^{\frac{1}{r}}$ erit cognitus, radix nimirum potentiæ aſſumptæ, adeoque dabitur A. Quare ſecundus terminus jam habebitur habito r, A, Q, qui terminus cum ſit B, habebitur ejus ope tertius, & ita porro: & ſiquidem valor Q fuerit ſatis exiguus, ſeries citiſſime converget, terminis perpetuo plurimum decreſcentibus.

132. Ad inveniendam autem potentiam proximam numero dato, ſatis eſt quærere aliquot radicis notas accuratas, & ad uſus, qui ſolent occurrere, ſatis eſt invenire binas, quæ præcedenti methodo admodum facile inveniuntur, tum radicis ita inventæ efformare potentiam, quæ propoſito numero erit ſatis proxima.

133. Quoniam autem valor Q vix unquam habebitur accuratus, & fractiones minores contemnendæ ſunt, cavendum, ut in eo aſſumantur tot notæ decimalium, quot notæ accuratæ tum integrorum, tum decimalium requirantur in radice, ne in multiplicatione ipſius Q per A in termino ſeriei ſecundo error notarum contemptarum plus æquo aſcendat multiplicatus & ipſe per A,

ac-

ac una nota addatur præterea; ne errores collecti ex fine ſingulorum terminorum ſeriei ad ſedem adhuc ſuperiorem aſſurgant; quod ſatis erit ad id cavendum; ubi non plures, quam decem termini aſſumi debeant; qui ſemper aſſumendi erunt multo pauciores; ſi valor Q fuerit ſatis exiguus. In ipſis autem multiplicationibus labor contrahetur mirum in modum; ſi eæ decimalium notæ quæ deinde rejiciendæ ſunt in producto; negligantur jam prius inter multiplicandum; quo pacto poſteriores termini ſemper multo facilius definientur.

134. Methodus autem, multo magis manifeſta fiet exemplis. Pro radice cubica ſubſtituendum eſt 3 pro *r*; ac ob $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ſeries erit $\overline{P+PQ}^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} AQ - \frac{1}{3} BQ - \frac{5}{9} CQ - \frac{2}{3} DQ - \frac{11}{15} EQ$ &c.

135. Proponatur numerus 74394516, cujus quæratur radix accurata per 6 notas. Primæ claſſis 74 radix cubica proximè minor eſt 4; cujus cubo 64 inde ablato, relinquitur 10, & adjecta ſequenti claſſe 394, fit 10494. Numeri autem 4 aucti cyphra o quadratum eſt 1600, ejuſque triplum 4800, per quod diviſo 10394, habetur 2. Aſſumantur igitur 42 pro primis notis, & adjecta cyphra una ob ſequentem claſſem, numeri 420 cubus 74088000 ſit P, quo ablato a numero propoſito 74394516, relinquetur 306516 pro PQ, eoque diviſo per P, habebitur Q = 0.0041372, ubi aſſumendæ ſunt notæ decimales ſeptem, cum quærantur ſex notæ accurate in radice.

136. Jam vero erit $A = P^{\frac{1}{3}} = 420$. $B = \frac{1}{3} AQ = \frac{1}{3} \times 420 \times 0.0041372 = 0.57921$, $C = -\frac{1}{3} BQ = -\frac{1}{3} \times 0.57921 \times 0.0041372 = -0.00080$; unde facile patet fore $D = 0.00000$; ac proinde radix quæſita $= A + B + C = 420$.

$+ 0.57921 - 0.00080 = 420.57841$, in qua tamen radice priores tantum ſex notę pro certo accuratis haberi poſſunt.

137. Si pro primo valore $P^{\frac{1}{3}}$ aſſumptus fuiſſet numerus 430. vero major, obveniſſet valor Q negativus, quo caſu omnes termini poſt primum negativi evadunt, ut patebit in hoc ipſo exemplo, ubi tamen ob numerum 430. aliquanto remotiorem a vero, valor Q obvenit aliquanto major, & ſeries convergit ſerius. Invenietur tamen radix quęſita poſt plures ſeriei terminos omnino congruens cum priore.

138. Erit autem $A = P^{\frac{1}{3}} = 430$, P cubus ejus numeri $= 79507000$, $PQ = 74394516 - 79507000 = -5112484$, $Q = \frac{-5112484}{79507000} = -0.0643023$, $B = \frac{1}{3} AQ = \frac{1}{3} \times 430 \times -0.0643023 = -9.21666$, $C = -\frac{1}{3} BQ = -\frac{1}{3} \times -9.21666 \times -0.0643023 = -0.19755$ $D = -\frac{5}{9} CQ = -\frac{5}{9} \times -0.19755 \times -0.0643023 = -0.00705$, $E = -\frac{2}{3} DQ = -\frac{2}{3} \times -0.00706 \times -0.0643023 = -0.00030$, $F = -\frac{11}{15} EQ = -\frac{11}{15} \times -0.00030 \times -0.0643023 = -0.00001$. Quare radix quęſita $430. - 9.21666 - 0.19755 - 0.00706 - 0.00030 - 0.00001 = 420.57842$, quę cum prius inventa 420 57841 uſque ad priores quatuor decimalium notas prorſus convenit, & in quinta nota unitate tantum differt.

139. Quod ſi quis velit plures notas certas, ſatius eſſet invenire prius methodo indicata pauciorem nota-

notarum numerum certum, tum radicis jam ſatis approximatę cubum iterum dicere P, & novo Q invento, qui eſſet admodum exiguus, haberetur ſeries convergentiſſima, ac paulo diligentius ipſam ſeriei naturam contemplantibus patebit, ſi radix aſſumpta $P^{\frac{1}{3}}$ ſit accurata per numerum notarum b, debere in valore Q poſt punctum prodire ſaltem numerum cyphrarum $b - 1$, & totidem ſaltem notas certas additu-ros ſingulos terminos ſeriei novos. Sic in priori exemplo, ubi pro radice aſſumptus fuerat numerus 420, in quo omnes tres notę erant accuratę, valor Q prodiit 0. 0041 &c. habens poſt punctum binas cyphras: in poſteriore, in quo radix aſſumpta 430 ſolam primam accuratam habuit, & ſecundam accuratę quam proximam, in valore Q = 0. 06 &c. vix unica poſt punctum cyphra eſt habita.

140. Ut methodus reſtituti calculi exemplo illuſtretur, quæratur ejuſdem numeri radix accurrata per notas 20. Aſſumpto pro radice, ſive pro valore $A = P^{\frac{1}{3}}$ numero jam invento 420 . 578, erit P = 74394298 . 738940552. Eo numero ablato a 74394516, relinquetur PQ = 217 . 261059448, & hoc diviſo per P, evadit Q = 0. 000002920399 3 1995498, ubi poſt punctum obvenerunt cyphræ 5 idcirco, quod in radice aſſumpta 420. 578 ſex notæ accuratæ ſunt; notæ vero decimalium aſſumptæ ſunt 21, cum radix quæratur accurata per notas 20. Singulis autem terminis ſaltem quinas determinantibus notas, quatuor tantum termini quæſitam radicem exhibebunt. Erit enim $A = P^{\frac{1}{3}} = 420{,}\ 578$, $B = \frac{1}{3} AQ =$ 0. 00040941856840 0287, $C = -\frac{1}{3} BQ = -$ 0. 00000000039855 5236, $D = -\frac{5}{9} CQ = +$

0. 0000000000000000646, ubi cum pateat valorem ſequentem debere addere ſaltem quinque alias cyphras, negligendus omnino eſt; & radix quæſita A + B + C + D erit = 420. 578409418169844440, omiſſa nimirum poſtrema minus certa; quæ eſſet 5, quæ omitti poteſt; vel ejus loco in præcedenti nota addi unitas, ut pro 40 fiat 41; quod ſemper fit, ubi prima e contemptis decimalium notis ſuperat 5, cum ea unitate addita, committatur error minor, quam ſi ſequens major 5 penitus omittatur.

141. In ſublimioribus potentiis methodus eſt prorſus eadem dummodo in ſerie $\overline{P + PQ}^{\frac{1}{r}} = P^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{r} AQ$ &c. ponatur pro r exponens radicis; nec quidquam operoſior eſt methodus pro iis, quam pro inferioribus.

142. Hac methodo radix accurata, ſi qua ſit, immediate non obtinetur. At indicabunt eam ipſi numeri radicis proxime, vel enim in fine coibunt multæ cyphræ cum admodum exigua fractione, vel multæ notæ 999 &c., ac licebit efformare eam potentiam numeri, qui præcedit cyphras, vel qui præcedit notas illas novenarii, qui quidem numerus in poſtrema nota eas præcedente augendus eſt unitate, & ſiquidem ea fuerit accurata radix, potentia ipſa prodibit æqualis numero dato: ut ſi radix accurata eſſet 452, methodus exhiberet vel 451. 000 &c. cum aliqua nota poſt plures cyphras, vel 451, 9999 &c.

§. VII.

§. VII.

De generalibus æquationum proprietatibus.

143. Æquatio dicitur aggregatum terminorum habens interpoſitum ſignum æqualitatis, & ad æquationem devenitur exponendo conditiones problematum; ac ex ſolutione æquationum continentium quantitates incognitas mixtas cum cognitis, pendet ſolutio problematum ipſorum, e quibus profluxerunt. Si quæratur numerus, cujus triplum cum quarta ejus parte efficiat 26, poſito numero quæſito $= x$, habebitur æquatio $3x + \frac{1}{4}x = 26$, vel ſi quærantur duo numeri, quorum ſumma 12, differentia 4, poſitis x & y pro binis numeris quæſitis habebuntur binæ æquationes $x + y = 12$, $x - y = 4$. Sed etiam ubi nullæ incognitæ quantitates adſunt, æquatio haberi poteſt, ut $8 + 4 = 12$.

144. Bina æquationis membra dicuntur binæ ejus partes hinc inde a ſigno æquationis poſitæ. Poteſt autem eſſe membrum æquationis etiam cyphra 0, cum nimirum in altero membro quantitates poſitivæ, & negativæ ſe mutuo deſtruunt. Sic $8 + 4 - 12 = 0$.

145. Ex natura æqualitatis patet, utrique membro addi, vel demi poſſe quantitatem eandem, vel binas quantitates æquales alteri alteram: itidem utrumque membrum multiplicari poſſe, vel dividi per eandem quantitatem, vel per binas æquales ſalva æqualitate. Inde autem eruuntur pro quavis æquatione ſequentia theoremata.

146. Quicunque terminus ex altero æquationis membro transferri poteſt in alterum, mutato ſigno, ſalva æqualitate.

147. Si enim terminus erat in altero membro poſitivus, & utrinque auferatur, in illo priore eliſus deſtruetur, in poſteriore apparebit negativus: ſi autem ſit nega-

negativus, & utrique addatur, ubi aderat, jam elſus evaneſcet, ubi non aderat, jam habebitur cum ſigno poſitivo.

148. Sit $8+4=12$; erit $8=12-4$; ablato enim utrinque 4, fit $8+4-4=12-4$.

149. Sit $8=12-4$; erit $8+4=12$; addito enim utrobique 4, fit $8+4=12-4+4$.

150. Ea translatio termini dicitur tranſpoſitio. In una e ſuperioribus æquationibus erat $x+y=12$, in altera $x-y=4$: erit tranſponendo in illa $x=12-y$, in hac $x=4+y$.

151. Inde autem deducitur in quavis æquatione poſſe mutari omnia ſigna omnium terminorum, ſalva æqualitate. Si enim omnes termini ex altero membro transferantur in alterum, & viceverſa, mutantur omnia terminorum omnium ſigna.

152. Si quis terminus per aliquam quantitatem multiplicatur, poſſunt omnes alii per eam dividi, & ea in illo termino omitti: & ſi erat diviſus, poſſunt reliqui per eam multiplicari, & ea ibi pariter omitti.

153. Nam dividendo utrunque membrum per eam quantitatem in primo caſu, & multiplicando in ſecundo, is terminus remanebit multiplicatus ſimul, & diviſus per eandem, quæ proinde eliditur; reliqui autem termini, qui per eam non multiplicabantur, nec dividebantur, jam dividentur in primo caſu, multiplicabuntur in ſecundo.

154. Sit $2\times 2+8=14$: erit $2+\frac{8}{2}=\frac{14}{2}$;

quia erit $\frac{2\times 2}{2}+\frac{8}{2}=\frac{14}{2}$.

155. Sit $\frac{8}{4}+3=5$: erit $8+3\times 4=5\times 4$;

quia erit $\frac{8\times 4}{4}+3\times 4=5\times 4$.

156.

156. Utrumque membrum poterit ad quamvis poteſtatem elevari, vel ex utroque quævis radix erui ſalva æqualitate.

157. Patet ex eo, quod quantitatum æqualium, & potentiæ, & radices ejuſdem exponentis æquales eſſe debent, cum illæ fiant per multiplicationem æqualium, hæ iterum ad eas potentias elevatæ illas reſtituant.

158. Sit $\sqrt{25} = 2 + 3$: erit $25 = \overline{2+3}^{2}$. & viceverſa.

159. Ope horum theorematum poteſt quævis æquatio liberari ab omnibus fractionibus, multiplicando nimirum omnes terminos per productum ex omnibus denominatoribus.

160. In æquatione $\frac{8}{2} + \frac{25}{5} 9 =$; multiplicando per 2×5, fit $5 \times 8 + 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 9$, ſive $40 + 50 = 90$.

161. Quod ſi aliqui e denominatoribus communes diviſores habeant, ii poſſunt in ea multiplicatione non repeti, ſed accipi ſemel tantum.

162. In æquatione $\frac{a}{bc} + \frac{d}{bf} = \frac{g}{fh}$; ſatis erit multiplicare per $bcfh$, & habebitur $afh + cdh = bcg$.

163. Si quævis quantitas, vel quantitatis cujuſvis potentia quævis ſit in aliquo termino æquationis, vel in pluribus, non vero in omnibus, utcunque multiplicata, vel diviſa per alias quantitates, poteſt ea relinqui ſola in altero membro ſine ullo multiplicante, ſive, quod idem eſt, poteſt haberi ejus valor per alios valores æquationis ipſius. Liberata enim a fractionibus quantitate, omnes termini, in quibus ea adeſt, poſſunt per tranſportationem collocari in altero æquationis membro, reliquis omnibus collocatis in altero, tum hoc ſecundum membrum dividi per aggregatum omnium quantitatum eam multiplicantium in membro priore.

164. Sit

164. Sit æquatio $by^5 - \frac{c^5 x^2}{p} = \frac{mx^2}{q} y^4 + \frac{x^2}{r} y^5$; in qua quæratur valor y^5 per alius ejus æquationis valores. Multiplicando per pqr, erit $bpqry^5 - c^5 qrx^2 = mprx^2 y^4 + pqx^2 y^5$, & tranſponendo $bpqry^5 - pqx^2 y^5 = mprx^5 y^2 + c^5 qrx^2$; ac dividendo per $bpqr - pqx^2$ fit demum $y^5 = \frac{mprx^2 y^4 + c^5 qrx^2}{bpqr - pqx^2}$

165. Hoc artificio poteſt ſemper ſolvi quodvis problema, quod exprimatur per unicam æquationem continentem unicam incognitam, eamque poſt demptas omnes fractiones, in quarum denominatore ea forte eſſet, elevatam ad eandem ubique potentiam: quod quamvis ad ſolutionem æquationum pertineat, tamen hic præmittimus, ut fructum aliquem laboris jam capiat Tyro, & ad ulteriora feſtinet alacrior.

166. In æquatione propoſita num. 143. $3x + \frac{1}{4}x = 26$, multiplicando per 4, fit $12x + x = 104$; adeoque $x = \frac{104}{12+1} = \frac{104}{13} = 8$. Numerus autem 8 problemati omnino ſatisfacit; nam ejus triplum 24 cum quarta ipſius parte 2 efficit 26.

167. Si quæratur numerus, cujus quadrans cum binis trientibus æquetur numero 132 per ipſum diviſo; eo facto $= x$, erit $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = \frac{132}{x}$, & multiplicando per $3 \times 4 \times x$, fit $3x^2 + 8x^2 =$

1584.

1584; ac proinde $x^2 = \frac{1584}{3+8} = \frac{1584}{11} = 144$, adeoque extrahendo utrinque radicem $x = \pm \surd 144 = \pm 12$. Satisfacit igitur quęſtioni tam $+ 12$, quam $- 12$. Et quidem eſt $\frac{1}{4} \times 12 + \frac{2}{3} \times 12 = 3 + 8$, & $\frac{132}{12} = 11$. Pariter $\frac{1}{4} \times - 12 + \frac{2}{3} \times - 12 = - 3 - 8$, ac $\frac{132}{-12} = - 11$.

168. Eodem artificio e binis æquationibus continentibus quantitatem aliquam utcunque permixtam cum aliis, & elevatam ad quaſcunque potentias integrum exponentem habentes, poteſt ea quantitas eliminari, efformando tertiam æquationem, quæ ea prorſus careat.

169. Si in altera æquatione liberata a fractionibus eam quantitatem forte habentibus in denominatore, ipſa quantitas ad eandem, ubicumque adeſt, potentiam elevatur, id facile præſtabitur capiendo ejus valorem in ea æquatione, & ſubſtituendo in alia.

170. In exemplo adducto num. 143 erat $x + y = 12$, $x - y = 4$. In priore capiendo valorem x erit $x = 12 - y$, quo ſubſtituto in poſteriore erit $12 - y - y = 4$, ſive $12 - 2y = 4$: unde etiam profluit ejus problematis ſolutio; jam enim valor y invenietur, cum tranſponendo debeat eſſe $12 - 4 = 2y$, ſive $8 = 2y$, & dividendo per 2 fiat $4 = y$; unde ob $x = 12 - y$ ſit $x = 12 - 4 = 8$. Ac proinde 8, & 4 ſunt ii duo numeri, quorum ſumma 12, differentia 4.

171. Si ſint æquationes $ax^2 + \frac{by^3}{x} = x^2 y$, & $mx^2 + nxy - a^3$ in priore multiplicando per x habetur $ax^3 + by^3 = x^3 y$ adeoque $ax^3 - x^3 y = - by^3$

$= -by^3$; & $x^3 = \frac{-by^3}{a-y}$; ac demum $x = y\sqrt[3]{\frac{-b}{a-y}}$. Hoc valore ſubſtituto in ſecunda æquatione fieret $my^2\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2-2ay+y^2}} + ny^2\sqrt[3]{\frac{-b}{a-y}} = a^3$

172. Si autem ea quantitas ad plures dimenſiones utrobique aſſurgit, eliminari poterit operoſiore methodo, ſed iiſdem principiis innixo. Inveniatur in utraque valor maximæ poteſtatis illius incognitæ, qui in utraque fuerit ejuſdem exponentis ; bini ii valores erunt æquales inter ſe, & habebitur nova æquatio ; quę eandem quantitatem continebit minus elevatam : In hac autem nova ęquatione invento pariter valore maximę potentię, ea, & totum alterum membrum poterunt multiplicari per eandem illam quantitatem, & hoc pacto invenietur novus valor potentię illius prioris ; qui ęquatus alteri ex pręcedentibus, reddet aliam ęquationem continentem eandem quantitatem elevatam ad minorem potentiam : ut ſi binę illę ęquationes habebant quartam potentiam quantitatis eliminandę, jam habebuntur binę æquationes, in quibus non aſſurget ultra tertiam. Si autem erant inęquales potentię, ut altera quarta, altera ſecunda, poterit hęc poſterior multiplicari tota per illam quantitatem ita, ut evadat ejuſdem quantitatis eadem potentia maxima in utraque æquatione. Eodem autem pacto e binis novis ęquationibus poteſt deveniri ad alias binas continentes potentiam adhuc minorem, & ita porro, donec deveniatur ad duas continentes ſolam primam potentiam, cujus bini valores æquati inter ſe exhibebunt ęquationem prorſus carentem illa quantitate.

173. Sint æquationes $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$,

$= 0$; $ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$, e quibus eliminare oporteat x. Quoniam utraque habet x^3 pro maxima potentia, capiatur in utraque ejus valor, eritque in prima $x^3 = \frac{-bx^2 - cx - d}{a}$, in ſecunda $x^3 = -\frac{fx^2\ gx - h -}{e}$. Quare erit $-\frac{bx^2 - cx - d}{a} = -\frac{fx^2 - gx - h}{e}$, ſive multiplicando per ae, & mutando omnia ſigna, erit $ebx^2 + ecx + ed = afx^2 + agx + ah$. In hac æquatione jam habetur tantum x^2, cujus valor haberi poteſt, cum tranſponendo ſit $ebx^2 - afx^2 = agx - ecx + ah - ed$, ac dividendo per $eb - af$, fiet $x^2 = \frac{agx - ecx + ah - ed}{eb - af}$. Multiplicando autem per x utrobique, erit $x^3 = \frac{agx^2 - ecx^2 + ahx - edx}{eb - af}$: erat $x^3 = \frac{-bx^2 - cx - d}{a}$ igitur erit $\frac{agx^2 - ecx^2 + ahx - edx}{eb - af} = -\frac{bx^2 - cx - d}{a}$. Quare jam habentur binæ æquationes continentes potentiam x ſecunda non ſuperiorem Eadem methodo ex iis devenietur ad binas continentes primam tantum, ac demum ad æquationem ipſum x non continentem. Ac eodem pacto e binis continentibus potentiam decimam deveniretur ad binas non ex-

cedentes nonam, tum ad alias binas non excedentes octavam, & ita porro uſque ad binas continentes primam tantummodo; & ad unicam eo prorſus carentem.

174. Si autem fuiſſent æquationes $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ & $fx^2 + gx + h = 0$ poterat hæc ſecunda multiplicari per x^2, & haberetur $fx^4 + gx^3 + hx^2 = 0$; ex quibus deveniretur ad binas non excedentes potentiam tertiam, tum ad binas non excedentes ſecundam, & ita porro.

175. Methodus quidem eſt plerumque ita operoſa; creſcente terminorum numero, ut formulę evadant penitus intractabiles; facile tamen patet generalem eſſe, & ſi debitus adhibeatur labor, debere ſemper omnino ſuccedere. Patebit autem pluribus in locis, quanto uſui id eſſe poſſit; interea alios ex illis iiſdem theorematis colligamus fructus pertinentes ad expoliendam æquationem, nimirum ad methodos, quibus liberari ea poſſit ab irrationalitate, ſeu terminis radicalibus.

176. Poteſt aliquando æquatio liberari ab irrationalitate; ſive a radicalibus per multiplicationem; & diviſionem.

177. In æquatione $b\sqrt{ax} + \frac{c}{\sqrt{ax}} = d\sqrt{ax}$: Multiplicando per $\sqrt{ax}$ habetur $abx + c = adx$; vel dividendo per $\sqrt{ax}$ habetur $b + \frac{c}{ax} = d$.

178. In æquatione $b\sqrt[3]{ax^2} + \frac{c}{\sqrt[3]{a^5 x}} = d\sqrt[3]{a^7 x^5}$

multiplicando per $\sqrt[3]{a^5 x}$, habetur $b\sqrt[3]{a^6 x^3} + c = d\sqrt[3]{a^{12} x^5}$, ſive $a^2 bx + c = a^4 dx^2$, vel dividendo

do per $\sqrt[3]{ax^2}$ fit $b + \frac{c}{\sqrt[3]{a^6 x^2}} = d\sqrt[3]{a^6 x^3}$; ſive $b + \frac{c}{a^2 x} = a^2 x$;

179. Elevando ad eamdem potentiam idem membrum, id poteſt preſtari ſolum, quotieſcunque in æquatione bini tantum termini habebuntur cum ſuis radicalibus ſinguli, vel bini radicales cum quotcumque terminis rationalibus, dummodo alter e radicalibus ſit radicis quadratæ, vel tres tantum radicis quadratæ, cum quotcumque rationalibus, vel quatuor radicis quadratæ ſine ullis aliis terminis.

180. Sit enim $a\sqrt[m]{x} - b\sqrt[n]{y} = 0$; erit transponendo $a\sqrt[m]{x} = b\sqrt[n]{y}$, & elevando ad potentiam m utrunque membrum erit $a^m x = b^m \sqrt[n]{y^m}$, ac elevando utrunque ad potentiam n, fiet $a^{mn} x^n = b^{mn} y^m$.

181. Sit $a\sqrt[m]{x} - b\sqrt{y} + c = 0$ exprimente c ſummam terminorum quotcumqqe rationalium; relicto $a\sqrt[m]{x}$ ex altera parte, fiet $a\sqrt[m]{x} = b\sqrt{y} - c$, & elevando utrobique ad potentiam m, in ſecundo membro remanebit numerus terminorum $m + 1$, in quibus tamen omnes potentiæ pares termini $b\sqrt{y}$ erunt liberę ab irrationalitate, omnes autem potentię impares habebunt quantitates rationales multiplicatas per $\sqrt{y}$; ut ſi $m = 5$; elevando ad quintam potentiam utrumque terminum, erit $a^5 x = b^5\sqrt{y^5} - 5b^4 c\sqrt{y^4} + 10 b^3 c^2 \sqrt{y^3} - 10 b^2 c^3 \sqrt{y^2} + 5 b c^4 \sqrt{y} - c^5$, ſive $a^5 x =$

 b^5

$b^5 y^2 \sqrt{y} - 5 b^4 c y^2 + 10 b^3 c^2 y \sqrt{y} - 10 b^2 c^3 y + 5 b c^4 \sqrt{y} - c^5$. Jam vero tranſpoſitis terminis omnibus in quibus non adeſt $\sqrt{y}$, fiet $a^5 x + 5 b^4 c y^2 + 10 b^2 c^3 y + c^5 = b^5 y^2 \sqrt{y} + 10 b^3 c^2 y \sqrt{y} + 5 b c^4 \sqrt{y} = (b^5 y^2 + 10 b^3 c^2 y + 5 b c^4)\sqrt{y}$, adeoque demum quadrando, evaneſcet irrationalitas.

182. Sit $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} + d = 0$. Relinquantur bini radicales in uno membro, & habebitur $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = - c\sqrt{z} - d$, & quadrando $a^2 x + b^2 y + 2ab\sqrt{xy} = c^2 z + d^2 + 2cd\sqrt{z}$, ac proinde caſus redactus eſt ad praecedentem.

183. Sit $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} + d\sqrt{u} = 0$, erit $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = - c\sqrt{z} - d\sqrt{u}$, adeoque quadrando $a^2 x + b^2 y + 2ab\sqrt{xy} = c^2 z + d^2 u + 2cd\sqrt{uz}$, caſu iterum ad binos radicales redacto.

184. Porro in his omnibus caſibus valores illi a, b, c, d poſſunt exprimere quoſcumque, & quotcunque terminos rationales, per quos multiplicentur illi radicales. In cæteris autem elevando ad potentias, numerus radicalium, vel manet idem, vel creſcit. Quare ad liberandam æquationem ab ipſis radicalibus recurrendum ad aliam methodum generalem, quæ pendet a methodo jam expoſita a num. 172. eliminandi quantitatem quamvis, e binis æquationibus, in quibus adſit. Nimirum quævis radix ponatur æqualis quantitati expreſſæ per novam literam, qua ſubſtituta in illa æquatione, habebitur nova æquatio continens novas illas quantitates, ſed carens radicalibus terminis. Porro habebuntur etiam tot aliæ æquationes, quot novi valores aſſumpti ſunt, in quibus ſingulis per eleva-

tio-

tionem ad eandem potentiam vitabitur irrationalitas. Earum autem ope, & præcedentis æquationis, eliminari poterunt illi novi valores aſſumpti, alii poſt alios, reducendo numerum æquationum ad pauciores, donec unica tandem relinquatur æquatio continens illos valores ſolum, quos continebat prima æquatio propoſita.

185. Sit $\sqrt[3]{x} + \sqrt{y} = \sqrt[4]{z} + b$ Ponatur $\sqrt[3]{x} = p$, $\sqrt{y} = q$, $\sqrt[4]{z} = r$, & habebuntur quatuor æquationes $p + q = r + b$, $x = p^3$, $y = q^2$, $z = r^4$ Ope primæ & ſecundæ poteſt eliminari p, & jam habebuntur tres æquationes, in quibus p non aderit. Ope hujus novæ, & illius tertiç $y = q^2$ poterit eliminari q, & jam habebuntur duæ, in quibus nec aderit p, nec q. Ope hujus novç, & illius quartæ $z = r^4$, poterit eliminari r, & jam habebitur çquatio, in qua nec aderit p, nec q, nec r, ſed illç ſolæ quantitates, quç aderant in æquatione propoſita: radicales autem termini penitus deerunt omnes. Hçc autem methodus admodum operoſa eſt, ſed ſatis patet eſſe generaliſſimam.

§. VIII.

De variis æquationum generibus.

186. ÆQuatio dicitur indeterminata, quæ habet plures incognitas quantitates, determinata, quç unicam; quia illa infinitas numero ſolutiones habet, hæc vel unicam, vel determinatum earum numerum. Nimirum infiniti numero valores ſunt, qui pro incognitis illis quantitatibus ſubſtituti illas verificant, unicus vel determinatus eorum numerus has.

187. Æquatio $x + y = 12$ dicitur indeterminata,

æquatio $3x + \frac{1}{4}x = 20$, vel æquatio $x^2 + 8 = 6x$ determinata. In illa enim prima, ſi ponatur $x = 1$, $y = 11$, vel $x = 2$, $y = 10$, vel $x = -1$, $y = +13$, & ita porro, ſemper verificatur $x + y = 12$ ita, ut infiniti ſint valores, qui pro x & y poſiti in ea æquatione verificent ipſam: in ſecunda autem ſolus ille numerus 8 inventus num. 166 equationi ſatisfacit, in tertia vero tam numerus 2, quam 3, cum ſit $2 \times 2 + 8 = 6 \times 2$, & $4 \times 4 + 8 = 6 \times 4$ ſive $4 + 8 = 12$, & $16 + 8 = 24$, nec ullus numerus pro x poſitus eas equationes verificabit.

188. Si alicujus problematis conditiones omnes exprimantur per plures equationes, ita tamen, ut tot habeantur incognitę quot æquationes; poterit ſemper deveniri ad unicam equationem, quę unicam incognitam habeat. Nam ſi ſint ex. gr. 10 æquationes, & totidem incognitæ, poterit conferendo primam cum ſecunda eliminari methodo expoſita num. 172. una ex iis incognitis, inveniendo novam æquationem, quę illa careat, tum idem prędtari poterit conferendo primam cum tertia, & ita porro, ac habebuntur jam novem equationes cum novem incognitis: eę eodem artificio poterunt reduci ad octo cum octo incognitis, & ita porro, donec deveniatur ad unicam cum unica incognita.

189. Hinc ſi habeantur tot equationes, quot incognitę, problema dicitur determinatum, & unicam, vel finitas numero ſolutiones habere poteſt. Si fuerint plures incognitę quam equationes, problema dicitur inderminatum, & admittit infinitas. Si autem plures fuerint equationes, quam incognitę, dicitur pluſquam determinatum, & niſi caſu contingat, ut determinatis incognitis per totidem aequationes, reliquae verificentur problema ipſum erit impoſſibile.

190. Inventi ſunt num. 170. bini numeri 8, & 4, quorum ſumma, 12, differentia 4, ope binarum aequationum $x + y = 12$, $x - y = 4$ habentium binas

nas incognitas. Unicam autem aequationem $x+y=12$ cum binis incognitis habere infinitas ſolutiones vidimus num. 187. Si demum habeantur binę ęquationes $3x+\frac{1}{4}x=26$, & $4x+\frac{1}{8}x=33$, utraque verificatur facto $x=8$. Sed ſi ſecunda equatio eſſet $4x+\frac{1}{8}x=66$, ambę ſimul per eundem valorem x verificari non poſſent, cum ex prima eruatur $x=8$ (per num. 166.), in ſecunda multiplicando per 8 fiat $32x+x=528$, ſive $x=\frac{528}{32+1}=\frac{528}{33}=16$; adeoque diverſos incognitę valores requirant.

191. Æquatio determinata dicitur ejus gradus, ad quem aſſurgit exponens maximę poteſtatis quantitatis incognitę, ubi ex ęquatione ipſa tollitur irrationalitas, aut fractio continens ſub ſigno radicali, vel in denominatore fractionis ipſam; illam quantitatem incognitam. Æquatio $2x^2+4x^3-37=\frac{5}{8}x$ eſt gradus tertii, quia maxima potentia quantitatis incognitę x eſt illud x^3. Æquatio $x^2\,10+\frac{10}{x}=27$ non eſt gradus ſecundi, licet videatur habere tantum x^2 & x, ſed tertii, quia ſublata fractione illa in cujus denominatore erat x, fit $x^3+10=27x$. Pariter in ęquatione $2x-3=\sqrt{3x}$, quę videretur eſſe gradus primi, ſublato radicali, habebitur quadrando utrobique, $4x^2-12x+9=3x$, ac proinde ęquatio evadit gradus ſecundi.

192. Fractiones, quę denominatorem cognitum habeant, nihil turbant ęquationis gradum; ſi vero adſint quantitates radicales continentes ſub ſigno radicali quan-

quantitates cognitas ; pariter æquationis gradus, quod pertinet ad methodum, qua ipſa æquatio ſolvenda eſt, & valor incognitę quantitatis inveniendus, nihil turbatur. At eo caſu æquatio ipſa, ſi ejus natura ſpectetur, pertinet ad altiorem gradum, nec in ſua ſede eſſe dicitur. Æquatio $x^2 + \frac{2}{3} x - 12 = 0$ eſt ſecundi gradus: at æquatio $x^2 - 2x\sqrt{3} + 4 = 0$, licet eodem tractetur modo, quo ęquationes ſecundi gradus, adhuc tamen altiorem ſedem habet, ad quam reducitur eliminato illo radicali. Tranſponendo nimirum fit $x^2 + 4 = 2x\sqrt{3}$, & quadrando $x^4 + 8x^2 + 16 = 12x^2$, quę eſt ęquatio gradus quarti.

193. Contra vero ſi ęquatio quędam altior dividi poſſit in duas irrationalitate carentes, ex quarum multiplicatione ea conſtet, diviſione ipſa deprimitur ad ſedem inferiorem. Æquatio $-x^3$ $10x^2 + 34x - 40 = 0$, dividi poteſt per $x - 4$ o, & prodit $x^2 - 6x + 10 = 0$. Illa igitur, quę erat gradus tertii, ejuſmodi diviſione redacta eſt ad duas alteram gradus primi, alteram ſecundi; adeoque ad ſedem inferiorem depreſſa eſt. Utrum autem aliqua ęquatio deprimi poſſit ad ſedem inferiorem, an in ea, quam pręſefert, neceſſario maneat; id pendet a methodo inveniendi diviſores omnes formulę datę, de qua egimus §. 3, cum pendeat ab eo, utrum dividi poſſit ęquatio ipſa per aliam gradus inferioris irrationalitate carentem.

194. Valor quantitatis incognitę, qui poſitus pro ipſa incognita verificat ęquationem, dicitur radix æquationis ipſius: ac proinde an aliqua quantitas ſit radix ęquationis cujuſpiam, cognoſcitur facile ſubſtituendo eum valorem pro incognita. Porro ſi radix eſt poſitivi valoris, dicitur radix vera, ſi negativi, appellari ſolet radix falſa, quanquam etiam ipſa ſit verè

ejus

ejus æquationis radix. In æquatione $3x + \frac{1}{4}x = 26$, radix eſt 8, in æquatione $x^2 + 8 = 6x$ radices ſunt tam 2, quam 4, omnes poſitivæ, quia iis numeris poſitis pro x verificatur æquatio, ut vidimus. In æquatione $x^2 - 3x = 10$ radices ſunt $+5$, & -2, quæ poſitæ pro x ipſam verificant, cum ſit $5 \times 5 - 3 \times 5 = 10$, & $-2 \times -2 - 3 \times -2 = 10$, ſive $25 - 15 = 10$, & $4 + 6 = 10$.

195. Aliquando aliquot vel etiam omnes radices ſunt impoſſibiles; ac eæ quæ poſſibiles ſunt reales dicuntur, quæ impoſſibiles, dicuntur imaginariæ. Unum e caſibus, in quibus, omnes impoſſibiles ſunt, patet fore eum, in quo æquatio nullam contineat potentiam incognitæ imparem, ac termini omnes ad alterum æquationis membrum tranſpoſiti poſitivi ſint, ac unus ex iis incognita careat, ut $x^4 + 2x^2 4 + 6 = 0$. Quovis enim valore ſubſtituto pro x, omnes termini erunt poſitivi, adeoque ſe mutuo deſtruere non poterunt, & ſubſtituto etiam 0 pro x, reliqui evaneſcent, ac relinquetur ille cognitus, qui non poteſt eſſe $= 0$. In æquatione vero $x^3 - 2x + 4 = 0$ ſubſtituendo -2, $1 + \gamma - 1$, $+ 1 - \gamma - 1$ æquationi ſatisfit. Quare eæ ſunt æquationis radices, & prima quidem realis eſt, reliquæ imaginariæ.

196. Æquatio vero per hujuſmodi tranſpoſitionem ordinatur, & ad debitam formam redigitur, quam acquirit, cum omnes ejus termini in unum membrum conjiciuntur, & fiunt $= 0$, ac in eo ordinantur ſecundum potentias ipſius incognitę ita, ut maxima potentia primum locum habeat, & ſit cum ſigno poſitivo, ac per nullam aliam quantitatem multiplicetur: potentiæ autem inferiores alię aliis ſuccedant, & ſi eadem potentia per plures quantitates cognitas multiplicetur, omnia ejuſmodi producta ad unicum terminum pertinere cenſeantur, ſcribanturque aliæ ſub aliis; ac proinde

forma

forma ęquationis ordinatæ eſt in æquatione ex. gr. gradus tertii $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, ubi p, q, r exprimunt quantitates quaſcunque cognitas poſitivas, vel negativas, vel quantitatum cognitarum aggregata quęvis. Ac illę quantitates p, q, quę multiplicant potentias incognitę, dicuntur coefficientes. In ęquatione $x^3 + 2x^2 - 6x - 10 = 0$, coefficiens ſecundi termini eſt 2, tertii -6, ac in ea collata cum illa generali expreſſione eſt $p = 2$, $q = -6$, $r = -10$. In ęquatione $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$, ęſt $p = -1$, $q = 3$, $r = -10$. In ęquatione

$$\begin{array}{llll} x^3 & + \frac{a^2}{2b} x^2 & + \frac{a^3}{4f} x & + c^3 = 0 \\ & - 3\frac{bc}{d} x^2 & - \frac{2a^3 d}{f} & \\ & & & + 8abc \end{array}$$

eſt $p = \frac{a^2}{2b} - \frac{3bc}{d}$, $q = \frac{a^3}{4f}$, $r = c^3 - \frac{2a^3 d}{f} + 8abc$.

Plurimum autem Tyroni proderit formulas generales contemplari, aç exerceri in comparatione homogeneorum, & ſubſtitutione valorum, quos caſus particulares exhibent pro formularum generalium valoribus.

197. Si deſit aliqua incognitę potentia poſt maximam, adhuc tamen in numerandis terminis conſideratur tanquam ſi adeſſet, & ejus coefficiens eſſet $= 0$. In ęquatione $x^3 - 3x - 3 = 0$, $-3x$ non eſt ſecundus terminus, ſed tertius, ac ſecundus deeſt, & ſi ea conferatur cum generali illa, erit $p = 0$, $q = -3$, $r = -3$.

198. Æquatio ordinatur, & ad debitam formam reducitur ope theorematum expoſitorum ſuperiore §. a num. 145. Fractiones nimirum tolluntur per multiplicationem, ac radicalia uno e pluribus methodis ibi expoſitis, collocantur termini omnes in eodem membro per

per tranſpoſitionem, liberatur primus terminus a coëfficiente per diviſionem. Æquatio $\frac{16}{x^2+2x}+x=8$ ad debitam formam reducetur, multiplicando prius per x^2+2x, & habebitur $16+2x^3+4x^2=8x^2+16x$; tum tranſponendo, ac ſimul ordinando ſecundum potentias ipſius x, fiet $2x^3 \begin{matrix}+4x^2\\-8x^2\end{matrix} -16x+16=0$, ſive $2x^3-4x^2-16x+16=0$, ac dividendo per 2, fiet $x^3-2x^2-8x+8=0$.

199. Hoc autem pacto diviſio adhibita ad liberandum a coëfficiente primum terminum, ſępe fractiones inducet in coëfficientes, quę hac methodo evitari non poterunt. Si ęquatio fuiſſet $\frac{7}{x^2+3x}+2x=5$, multiplicando per x^2+3x, fieret $7+2x^3+6x^2=5x^2+15x$, ac tranſponendo & ordinando $2x^3+x^2-15x+7=0$, & dividendo per 2 demum $x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{15}{2}x+\frac{7}{2}=0$. Eę tamen fractiones tolli poterunt alia methodo quam trademus.

§ IX.

De ſolutione ęquationum determinatarum primi, & ſecundi gradus.

200. ANtequam ęquationum determitarum naturam, & generales proprietates conſideremus, trademus hic quę pertinent ad ſolutionem ęquationum primi, & ſecundi gradus, quę nimirum ex iis, quę hactenus vidimus abunde haberi poteſt, & ad ea ipſa, quę deinde dicturi ſumus, viam ſternit.

201. Porro ſolutionem ęquationum gradus primi vidimus

dimus etiam num. 166. Ex ſolvuntur ſola ferme æquationis ordinatione. Quævis enim æquatio primi gradus ordinata reducitur ad hanc forma $x + p = 0$; adeoque erit $x + = - p$.

202. Æquatio $\frac{1}{4} x = 26 - 3x$ reducitur multiplicando per 4 ad hanc $x = 104 - 12x$, & tranſponendo ad hanc $13x - 104 = 0$; ac dividendo per 13 ad hanc $x - 8 = 0$; ubi $p = -8$, adeoque $-p = 8$, & proinde $x = 8$.

203. Patet radicem $-p$ æquationis primi gradus fore poſitivam, vel negativam, prout in formula $x + p = 0$ terminus p fuerit negativus, vel poſitivus.

204. Patet etiam æquationem gradus cujuſvis, in qua deſint omnes termini præter primum, & ultimum, reduci poſſe ad æquationem primi gradus, & ſolvi eadem methodo; quod etiam præſtitimus num. 167. Si enim fuerit $x^m + p = 0$, facto $x^m = y$, erit $y + p = 0$, $y = - p$; $x = \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{-p}$.

205. Æquationes ſecundi gradus ordinatæ ſolvuntur per extractionem radicis. Earum formula generalis eſt $x^2 + px + q = 0$. Si in ea fuerit $p = 0$, ſive ſi careat ſecundo termino, & ſit $x^2 + q = 0$, ſolvitur methodo jam expoſita, reducendo prius ad formam æquationis primi gradus, vel immediate tranſponendo fit $x^2 = - q$, & $x = + \gamma - q$.

206. Patet autem ibi haberi binas radices alteram poſitivam, alteram negativam, reales ambas, vel ambas imaginarias, prout valor q fuerit negativus, vel poſitivus.

207. In æquatione $x^2 - 4 = 0$ eſt $x^2 = 4$, & $x = \pm 2$, ubi cum ſit $q = -4$, ambæ radices ſunt reales: & in æquatione $x^2 + 4 = 0$ fit $x^2 = -4$; & $x = \pm \sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$ ambæ imaginariæ.

208. Si

208. Si autem non ſit $p=0$, ſed æquatio affecta ſit ſecundo termino, tranſponatur tertius terminus cognitus q, eritque $x^2+px=-q$. Quoniam in primo membro habetur x^2 quadratum quantitatis incognitæ x, & px productum ex p, & x, adeoque duplum productum ex $\frac{1}{2}p$ & x; ſi addatur utrique membro quadratum dimidii coefficientis p, ſive $\frac{1}{4}p^2$ complebitur in primo membro quadratum, ac habebitur $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2-q$, ubi ipſum primum membrum erit neceſſario quadratum binomii $x+\frac{1}{2}p$, & ſecundum membrum erit totum cognitum. Extrahendo igitur utrobique radices, erit $x+\frac{1}{2}p=\pm\surd(\frac{1}{4}pp-q)$ ac tranſponendo fiet $x=-\frac{1}{2}p\pm\surd(\frac{1}{4}pp-q)$. Nimirum habebuntur binæ radices $-\frac{1}{2}p+\surd(\frac{1}{4}pp-q)$ & $-\frac{1}{2}p-\surd(\frac{1}{4}pp-q)$.

209. In æquatione illa $x^2+8=6x$, quæ ordinata evadit $x^2-6x+8=0$, eſt $p=-6$, $q=8$. Hinc $-\frac{1}{2}p\pm\surd(\frac{1}{4}pp-q)=+3\pm\surd(9-8)=+3\pm\surd1$ $=3\pm1$, nimirum binæ radices ſunt $3+1=4$, & $3-1=2$.

210. Conſiderando autem illam formulam generalem $x=-\frac{1}{2}p\pm\surd(\frac{1}{4}pp-q)$ multa quæ ad radices hujuſmodi pertinent, facile deprehendentur.

211. In primis ſi valor q fuerit negativus, valor $-q$ erit

q erit poſitivus; & $\surd(\frac{1}{4}pp - q)$ erit ſemper valor realis; & ſemper major quam $\frac{1}{2}p$, ac ſive p fuerit valor poſitivus, ſive negativus, erit $-\frac{1}{2}p + \surd(\frac{1}{4}pp - q)$ valor poſitivus $-\frac{1}{2}p - (\surd\frac{1}{4}pp - q)$ valor negativus. Quare quotieſcumque tertius terminus fuerit poſitivus, ſemper habebuntur binæ radices reales, & quidem altera poſitiva; altera negativa. In æquatione $x^2 - 6x - 16$ binæ radices altera poſitiva; altera negativa erunt $+8$, & -2.

212. Si fuerit $q = 0$, erit $\surd(\frac{1}{4}pp - q) = \surd\frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}p$; nimirum altera radix $-\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p = -p$ altera $-\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = 0$. Quare ſi deſit ultimus terminus, erit altera radix realis æqualis coefficienti ſecundi termini accepti cum ſigno contrario, altera $= 0$. In æquatione $x^2 - 6x = 0$, erit $x = 6$; & $x = 0$.

213. Si valor q fuerit poſitivus, ſed adhuc minor quam $\frac{1}{4}pp$; $\surd(\frac{1}{2}pp - q)$ adhuc erit valor realis, ſed minor $\frac{1}{2}p$; nimirum binæ radices erunt ambæ reales, ſed erunt poſitivæ, vel negativæ, prout $-\frac{1}{2}p$ fuerit valor poſitivus, vel negativus, nimirum prout valor p fuerit negativus, vel poſitivus. Quare ſi tertius terminus fuerit poſitivus, ſed adhuc minor quadrato dimidii coefficientis ſecundi termini, ambæ radices erunt reales, & ambæ poſitivæ, vel ambæ negativæ; prout coefficiens ſecundi termini fuerit contra negativus, vel poſitivus. In æquatione $x^2 - 6x + 5$, radices erunt

5 & 1.

5 & 1, in æquatione $x^2 + 6x + 5 = 0$, erunt -5 & -1.

214. Si valor q fuerit poſitivus, & jam æqualis $\frac{1}{4}pp$, erit $\sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)} = 0$, adeoque binæ radices $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ & $-\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$, ambæ reducentur ad $-\frac{1}{2}p$, eruntque inter ſe æquales. Quare ſi tertius terminus fuerit poſitivus, & æqualis quadrato coefficientis ſecundi termini, ambæ radices erunt reales, ſed æquales erunt inter ſe, nimirum æquales dimidio coefficienti ſecundi termini accepto cum ſigno contrario. In æquatione $x^2 - 6x + 9 = 0$ radices erunt $+3$, & iterum $+3$.

215. Si demum valor q fuerit poſitivus, ſed jam major quam $\frac{1}{4}pp$, erit $\frac{1}{4}pp - q$ valor negativus ac proinde $\sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ valor imaginarius. Quare ſi tertius terminus fuerit poſitivus, & major quadrato coefficientis ſecundi termini, erunt ambæ radices imaginariæ, & problema impoſſibile. In æquatione $x^2 - 6x + 10 = 0$ radices erunt $+3 \pm \sqrt{-1}$.

216. Præterea conferendo haſce binas radices $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$, & $-\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$, patet, earum ſummam fore $-p$, & earum productum fore $\frac{1}{4}pp - \frac{1}{4}pp + q = q$. Quare ſumma binarum radicum erit ſemper æqualis coefficienti ſecundi termini accepto cum ſigno contrario, productum vero tertio termino; ac ſi radices accipiantur cum ſigno contrario ei, quod habent, earum ſumma erit jam æqualis illi coefficienti accepto cum ſuo ſigno, productum autem

tem poſtremo termino adhuc æquale erit. Patebit id in omnibus ſuperiorum æquationum exemplis, ut in prima $x^2 - 6x - 16 = 0$, cujus radices $+8$, & -2, ac mutatis earum ſignis, habetur -8, $+2$, quarum ſumma -6, productum -16.

217. Diſcat Tyro e formulis generalibus ad omnes caſus particulares applicatis eruere theoremata, & ſolutionum generalium vim intimius perſpicere. Porro poſtremam hanc proprietatem, ut nimirum coefficiens ſecundi termini ſit ſumma radicum acceptarum cum ſigno contrario, ultimus autem terminus ſit earum productum, videbimus infra generalem eſſe omnibus omnium graduum æquationibus, quod ipſum etiam in ſuperiore ſolutione æquationum primi gradus patet, ubi in æquatione $x + p = 0$, adeoque $x = -p$ valor radicis $-p$ mutato ſigno fit $+p$ ac eſt coefficiens ſecundi termini, qui ibi eſt totus ſecundus, & ultimus terminus.

218. Ex iis, quæ demonſtrata ſunt, eruitur alia quoque proprietas, quæ quidem generalis eſt omnibus omnium graduum æquationibus, ſed inductione ſola patet, nec huc uſque, quo ſciamus, ab ullo eſt demonſtrata, quod nimirum tot habeantur radices poſitive, quot habentur mutationes ſignorum in terminis ſibi ſuccedentibus, tot autem negativæ, quot habentur continuationes. Ex: gr. æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$, in qua primus terminus habet (per num. 209) ſignum poſitivum, ſecundus ſignum negativum, tertius iterum poſitivum, adeoque ſignum bis mutatur, habet binas radices poſitivas $+2$, & $+4$, æquatio $x^2 + 6x + 8 = 0$, in qua ſignum bis continuatur, radices -2, & -4 ambas negativas, æquatio $x^2 - 6x - 16 = 0$, in qua prius tranſitur a ſigno poſitivo ad negativum, tum ſignum continuatur, habet (per num. 216) radices $+8$, -2 alteram poſitivam alteram negativam. Porro oſtenſum eſt (num. 211), quotieſcunque tertius terminus eſt negativus, al-

teram

teram radicem ſemper eſſe poſitivam, alteram negativam, quo quidem caſu neceſſario habetur una mutatio, & una continuatio ſigni; nam ſi ſecundus terminus ſit poſitivus, tranſitur a primo poſitivo ad ſecundum poſitivum continuando, tum ab eo poſitivo ad tertium negativum, mutando. Si autem ſit negativus, primum habetur mutatio, tum continuatio. Quoties autem ultimus terminus eſt poſitivus, oſtenſum eſt num. 213 ambas radices eſſe poſitivas, vel negativas, prout ſecundus terminus fuerit negativus, vel poſitivus, ſive prout binæ habebuntur mutationes, vel binæ continuationes. Patet eadem regula & in primo gradu; nam in æquatione $x + p = 0$ valor $x = -p$ erit poſitivus, ſi p habet valorem negativum contrarium ſigno primi termini, contra negativus, ſi idem ſit ſignum. Quare hæc regula in æquationibus primi, & ſecundi gradus hic demonſtratur.

219. Patet etiam ex iis, quæ demonſtrata ſunt, num. 211, 212, 213, in æquatione ſecundi gradus radicem unicam imaginariam eſſe non poſſe, ſed vel neutram eſſe, vel ambas. Hæc etiam eſt generalis proprietas æquationum omnium quorumcumque graduum, ut nimirum radicum imaginariarum numerus par tantum eſſe poſſit, ac ejus proprietatis ratio inferius patebit.

220. Ad formam æquationis ſecundi gradus reducuntur æquationes omnes, quæ habent tres tantum terminos, in quorum poſtremo deeſt incognita, in primo autem ea aſſurgit ad potentiam duplam ejus quam habet in ſecundo, quæ nimirum habet hanc formam $x^{2m} + px^m + q = 0$. Nam poſito $y = x^m$, fiet $y^2 + py + q = 0$, adeoque $y = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$, & $x = \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q.)}}$

221. Sit æquatio $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$. Erit $p = -6$,

$q = 1$; $m = 2$, adeoque $x = \pm\sqrt{3 + \sqrt{(9 - 1)}} = \pm\sqrt{3 + \sqrt{(8)}}$; quin immo quoniam binomium $3 + \sqrt{8}$ eſt quadratum binomii $1 + \sqrt{2}$, cujus nimirum quadratum eſt $1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{8}$, erit $x = \pm 1 \pm \sqrt{2}$, & æquatio propoſita habebit haſce quatuor radices $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, $-1 + \sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$.

222. Porro an ex binomio hujus formæ $m + \sqrt{n}$ extrahi poſſit radix quadrata, ut hic ex binomio $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ extrahitur, id ipſum deprehendi poteſt ope hujuſmodi æquationum gradus quarti reſolutarum more æquationum gradus ſecundi, eruendo nimirum earum ope formulas quaſdam generales; quæ licet prima fronte videantur implicatiores ipſo binomio propoſito, adhuc tamen ſemper ad radicem quæſitam perducunt, quotieſcunque ea habetur, ſive conſtet binis terminis irrationalibus, ſive altero rationali, altero irrationali; ſunt autem ſatis aptæ ad indicandam Tyroni Algebraicarum ſolutionum vim multiplicitate radicum omnes problematis partes complectentium.

223. Capiatur formula binomii $x + y$ habentis pro quadrato $x^2 + 2yx + y^2$. Id quadratum ponatur æquale binomio propoſito $m + \sqrt{n}$ ita, ut pars illa $x^2 + y^2$, quæ rationalis eſſe debet etiam in caſu, quo x & y radicalem quantitatem contineant, ponatur æqualis parti rationali m, reliquum $2yx$ ponatur $= \sqrt{n}$. Habebuntur binæ æquationes $x^2 + y^2 = m$, $2yx = \sqrt{n}$, & in poſteriore quadrando erit $4y^2x^2 = n$, ac ſi libeat, eliminato valore y, quærere valorem x, dividendo per $4x^2$ erit $y^2 = \frac{n}{4x^2}$, quo valore ſubſtituto in priore

æqua-

æquatione, fiet $x^2 + \frac{n}{4x^2} = m$, ſive multiplicando per x^2 fiet $x^4 + \frac{1}{4}n = mx^2$, vel $x^4 - mx^2 + \frac{1}{4}n = 0$; unde methodo jam expoſita infertur $x^2 = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}n} = \frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - n}}{2}$. Hinc autem habentur demum quatuor valores $x = \pm\sqrt{\frac{m \pm \sqrt{(m^2 - n)}}{2}}$; combinato utrolibet ſigno radicis includentis cum utrolibet radicis incluſæ.

224. Inde vero ope æquationis $x^2 + y^2 = m$, adeoque $y^2 = m - x^2$ infertur valor $y^2 = m - \frac{m \pm \sqrt{mm - n}}{2}$. Cumque ſit $m = \frac{2m}{2}$, erit $y^2 = \frac{2m - m \mp \sqrt{mm - n}}{2} = \frac{m \mp \sqrt{mm - n}}{2}$ qui valor eſt idem prorſus cum valore $x^2 = \frac{m \pm \sqrt{(m^2 - n)}}{2}$ cum hoc ſolo diſcrimine, quod ſignum termini radicalis $\sqrt{(mm - n)}$ debet in valore y^2 ſumi contrarium ei, quod habetur in valore x^2 ita, ut radix illa quæſita $x + y$ ſit $\pm\sqrt{\frac{m \pm \sqrt{(mm - n)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{m \mp \sqrt{(mm - n)}}{2}}$, ac ſigna omnia radicum ambiguarum liceat combinare, ut libuerit, ſed radicis incluſæ ſignum ſemper debeat in altero e binis terminis eſſe contrarium ei, quod habet in altero.

225. Si ſine hujuſmodi conditione haberentur 16 diverſi valores ejus binomii, nam primus terminus ſeorſum conſideratus habet quatuor diverſos valores, ut vidimus, ac ſecundus pariter quatuor, & liceret quemvis e prioribus quatuor combinare cum quovis e poſterioribus, adeoque pro quolibet ex ipſis quatuor valoribus prioris haberentur quatuor diverſæ radices. Sed octo ex iis haberent in utroque termino idem ſignum radicis incluſæ. Quoniam enim tam in primo termino, quam in ſecundo bini valores habent ſignum radicis incluſæ poſitivum, bini autem negativum, ſinguli ex primis quatuor combinati cum binis e quatuor poſterioribus habebunt ſignum idem in radice incluſa, & bini contrarium, adeoque octo valores erunt cum eodem ejuſmodi ſigno, & ad preſentis problematis ſolutionem non pertinebunt, octo autem alii erunt cum diverſo, & radicem quæſitam exhibebunt, qui invenientur combinando quemvis e quatuor valoribus primi termini cum binis ſecundi, ſigno contrario affectis, eruntque

$$+\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}} \quad +\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$+\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}} \quad -\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$-\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}} \quad +\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$-\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}} \quad -\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}} \quad +\sqrt{\frac{-m+\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$+\sqrt{m}$

$$+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}} \quad -\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}};$$

$$-\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}} \quad +\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}};$$

$$-\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}} \quad -\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}.$$

226. Porro ex his ipſis octo radicibus prima eſt eadem prorſus, ac quinta cum hoc ſolo diſcrimine, quod qui terminus in altera ponitur primo loco, in altera ponitur ſecundo: ſecunda pariter eſt eadem, ac ſeptima, tertia eadem, ac ſexta, quarta eadem, ac octava. Quare jam reducuntur ad ſolas primas quatuor; & earum quævis exhibet radicem binomii $m+\sqrt{n}$ cum hoc diſcrimine, quod cum, ob valorem ambiguum ipſius $\sqrt{n}$, id binomium binos valores habeat, $m+\sqrt{n}$, m, $-\sqrt{n}$; prima & quarta exhibent radicem binomii $m+\sqrt{n}$, ſecunda, & tertia binomii $m-\sqrt{n}$; quarta autem eſt ipſa prima negativè accepta, & tertia ipſa ſecunda pariter negativè accepta. Hoc pacto e 16 valoribus, quos contineret formula $\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}$ $+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}$. Habita ratione ambiguitatis ſignorum, octo excluduntur ab ipſa problematis natura, & pertinent ad aliud problema; reliqui octo reducuntur ad quatuor, quorum bini exhibent radicem poſitivam, & negativam binomii $m+\sqrt{n}$, bini alii radicem pariter poſitivam, & negativam binomii $m-\sqrt{n}$.

227. Reliqui octo valores pertinerent ad proble-

ma, cujus binæ æquationes eſſent $x^2 + \frac{n}{y^2} = m$, & $x^2 - y^2 = 0$, ex quarum poſteriore haberetur $y^2 = x^2$, & $y = \pm x$, ac ſubſtituto valore y^2 in prima, fieret $x^2 + \frac{n}{x^2} = m$, & $x^4 - mx^2 + n = 0$, ut prius, cum iiſdem quatuor valoribus pro x: valores verò y eſſent iidem, ac valores x ita, ut radicis incluſæ ſignum deberet in utroque idem aſſumi, ac variari poſſet ſignum radicis includentis, vel retineri idem; quod quidem ſi variaretur, fieret $x + y = 0$, ſi maneret, fieret $x + y = 2x$, adeoque ex iiſdem octo valoribus quatuor evaneſcunt, ut $+\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}} - \sqrt{\frac{m\sqrt{(mm-n)}}{2}}$, quatuor alii reducuntur ad unicum terminum, ut $+\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}} + 2\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}$, quod reducitur ad $\sqrt{\frac{m+\sqrt{mm-n}}{2}}$ vel $\sqrt{2m+2\sqrt{(mm-n)}}$. Sed ea huc non pertinent.

128. Porro ut jam applicetur ejuſmodi formula $\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}$ ad extractionem radicis ex binomio $m + \sqrt{n}$, ſubſtituantur pro m, & n valores ſui, & quotieſcunque binomium illud habebit radicem extrahibilem, $mm - n$ erit quadratum radicem pariter extrahibilem habens, qua extracta, reducetur formula ad binas radices ſimplices, & quidem ſi radix quæſita alterum terminum rationalem habuerit, ex earum altera radix extrahi poterit, ſecus ex neutra. In binis autem radicis inventæ terminis ſignum idem adhibendum erit, vel

vel bina contraria, prout propoſiti binomii bini termini fuerint cum eodem ſigno, vel cum oppoſitis.

229. In caſu propoſito habebatur $3 + \sqrt{8}$. Eſt igitur $m = 3$, $n = 8$, $mm - n = 9 - 8 = 1$, unde radix extrahi poteſt. Erit radix quæſita $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{(9-8)}}{2}}$ $+ \sqrt{\frac{3 - \sqrt{(9-8)}}{2}} = \sqrt{\frac{(3+1)}{2}} + \sqrt{\frac{(3-1)}{2}} =$ $\sqrt{2} + \sqrt{1} = \sqrt{2} + 1$, & ob ambiguitatem ſigni $\sqrt{2}$, habebuntur quatuor valores $+\sqrt{2} + 1$, $-\sqrt{2} - 1$, $+\sqrt{2} - 1$, $-\sqrt{2} + 1$, quarum priores duæ exhibent radicem binomii $3 + \sqrt{8}$, poſteriores radicem binomii $3 - \sqrt{8}$. In hoc autem caſu alter terminus radicis quæſitæ eſt rationalis, alter irrationalis.

230. Si fuiſſet propoſitum $7 + \sqrt{40}$, haberetur $m = 7$, $n = 40$, $mm - n = 49 - 40 = 9$, unde pariter radix extrahi poteſt. Radix igitur quæſita eſſet $\sqrt{\frac{7 + \sqrt{9}}{2}} + \sqrt{\frac{7 - \sqrt{9}}{2}} = \sqrt{\frac{(7+3)}{2}}$ $+ \sqrt{\frac{(7-3)}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, neutro termino rationali. At ipſius $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ quadratum eſt $5 + 2\sqrt{10} + 2$, ſive $7 + \sqrt{40}$ ipſum illud binomium propoſitum.

231. Si vero fuiſſet propoſitum $5 + \sqrt{8}$, eſſet $m = 5$, $n = 8$, $mm - n = 25 - 8 = 17$, unde cum radix non poſſit extrahi, conſequitur ex ipſo illo binomio $5 + \sqrt{8}$ non poſſe radicem extrahi.

232. Poterit aliquando binomium hujus formæ radicem habere, quæ hac methodo non innoteſcat; ſed ad aliam prius formam reducendum erit, & ſub hac forma ipſa radicem non habebit. Id autem contingere poterit, cum radicalis terminus binomii propoſiti radicem habebit extrahibilem.

233. Si proponatur $6 + \sqrt{9}$, erit $m = 6$, n

$= 9$; $mm - n = 36 - 9 = 27$, unde radix extrahi non poteſt. Et tamen $6 + \sqrt{9} = 6 + 3$ habet binos valores 9, & 3, ex quorum priore extrahitur radix rationalis $+ 3$, poſterior habet radicem ſimplicem $\sqrt{3}$. At hæ radices extrahuntur ex illo binomio ad aliam formam redacto; & ſi binomium per extractionem radicis e ſecundo termino in aliam formam reduci non poterit, ut nunquam reverâ poterit, cum ſecundus ipſe terminus erit verè irrationalis; nunquam accidet, ut extrahi poſſit e binomio radix, & hac methodo radix ipſa non inveniatur.

234. Supereſt notandum poſtremo loco, utrumque radicis terminum, nimirum tam $\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}$, quam $\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}$ proveniſſe in ſolo illo valore $x = \sqrt{\frac{m \pm \sqrt{(mm-n)}}{2}}$. Id autem contigit, quia ad ipſum problema, & ad æquationes illas $x^2 + y^2 = m$, $2xy = \sqrt{n}$ prorſus indifferenter ſe habebant x, & y ita, ut ſi pro quærendo valore x, quæſitus fuiſſet valor y, eadem prorſus æquatio debuiſſet obvenire pro y, quæ obvenit pro x. Si enim facto $4x^2 y^2 = n$; libuiſſet eliminare potius x, obveniſſet $x^2 = \frac{n}{4y^2}$; & $\frac{n}{4y^2} + y^2 = m$, ſive $y^4 - my^2 + \frac{1}{4}n = 0$ eadem prorſus æquatio, quæ prius, pro x; ac proinde idem debet eſſe valor x, ac y. Sed quoniam ubi alter ex altero eruitur, mutatur ſignum radicis incluſæ; id ſi in altero aſſumitur poſitivum, in altero negativum aſſumendum erit. Semper autem in ejuſmodi caſibus æquatio ſimul exhibebit valorem utriuſque termini, ut hic exhibuit. Sic ſi quærantur bini numeri, quorum ſumma 5, productum

ctum 8, & alter dicatur x, alter y, erit $x + y = 6$, $xy = 8$, & patet, utrunque indifferenter ſe habere ad haſce æquationes ita, ut altero ſubſtituto alterius loco, eadem prorſus æquatio oriri debeat. Hinc ſi eliminetur y, erit $y = \frac{8}{x}$ adeoque $x + \frac{8}{x} = 6$, $x^2 + 8 = 6x$, $x^2\ \ 6x + 8 = 0$, $x = 3 \pm \sqrt{(9 - 8)} = 3 \pm 1$; adeoque $x = 4$, vel $x = 2$. E prima autem equatione erat $y = 6 - x$; quare $y = 6 - 3 \mp \sqrt{(9-8)} = 3 \mp \sqrt{1} = 3 \mp 1$; nimirum $y = 2$, vel $= 4$. Numeri queſiti ſunt 4, & 2, quos ſimul in valore ipſo x exhibuit æquatio ita, ut poſito $x = 4$, ſit $y = 2$, & viceverſa.

§. X.

De natura, & variis proprietatibus æquationum determinatarum.

235. ÆQuationes determinatæ graduum ſuperiorum oriuntur ex multiplicatione æquationum graduum inferiorum, ac ſi plures æquationes primi gradus inter ſe multiplicentur, patebit ipſa æquationum altiorum natura. Sint æquationes $x + a = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$ &c., quarum radices (per num. 201) ſunt $-a$, $-b$, $-$ &c. Si eæ multiplicentur inter ſe, orietur ex binis æquatio ſecundi gradus $x^2 + ax + ab = 0$; ex ternis tertii
$$\begin{array}{l} + bx \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x^3 & + a x^2 & + abx & \\ & + b\ x^2 & + acd & + abc = 0 \\ & + x\ c^2 & + bcx & \end{array}$$

& ita porro ex numero m æquationum gradus primi orietur æquatio gradus m, quod patet in hujuſmodi productis exhibitis numer. 84. Generaliter autem patet ex binis æquationibus gradus m, & n, provenire æquationem gradus $(m + n)$. Prima enim incipit per x^m, ſecunda

tia per x^n, & in iis terminis multiplicatis, nova æquatio (per num. 37) incipiet per x^{m+n}.

236. Si conſideretur productum ex iis æquationibus ſimplicibus patebit, (per num. 85) coefficientem ſecundi termini eſſe ſummam illorum valorum a, b, c, d, &c., coefficientem tertii eſſe ſummam productorum e binis, coefficientem quarti ſummam productorum e ternis, & ita porro, ac demum coefficientem poſtremi, eſſe productum ſimul ex omnibus. Porro quivis ex iis valoribus acceptus cum ſigno contrario eſt radix æquationis compoſitæ. Nam tota æquatio evadit $(x+a) \times (x+b) \times (x+c) \times (x+d)$ &c. $= 0$. Si autem pro x ponatur, exempli gratia, $-b$, erit profecto $x+b=0$, adeoque etiam $x+b$ ductum in $(x+a) \times (x+c) \times (x+d)$ &c. fiet $= 0$, nimirum poſito $-b$ pro x æquatio verificabitur, adeoque $-b$ eſt ejuſdem æquationis radix (per num. 194), & eadem eſt demonſtratio pro reliquis.

237. Inde autem infertur primo loco æquationem habere tot radices, quot exprimit exponens gradus, ad quem aſſurgit, nimirum æquationem ſecundi gradus duas, tertii tres, & ita porro; quanquam aliquæ ex iis poterunt eſſe imaginariæ, ſive impoſſibiles. Si enim in æquatione orta ex binis $x+a=0$, $x+b=0$, nimirum $x^2 + ax + bx + ab = 0$, fit $a = h - g\sqrt{-1}$, $b = h + g\sqrt{-1}$, iis valoribus ſubſtitutis, æquatio erit $x^2 + 2hx + h^2 + g^2 = 0$, quæ nullum valorem imaginarium præſefert, & tamen habet binas radices prorſus imaginarias ob illud $\sqrt{-1}$.

238. Æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$ habet (per num.

num. 209) binas radices $+ 2$, $+ 4$, reales, æquatio $x^2 - 6x + 10 = 0$ (per num. 215) binas imaginarias $+ 3 + \surd - 1$, & $+ 3 - \surd - 1$, æquatio $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ habebit tres radices $- 1$, $+ 1$, $+ 3$, ut conſtabit ponendo quamvis ex iis pro x.

239. Generaliter autem æquatio compoſita ex quibuſvis, & quotcunque æquationibus habebit pro radicibus radices omnes eaſdem, quas habent componentes. Nam ſi quis valor poſitus pro x in unà e componentibus efficit ut ea evaneſcat facta $= 0$, idem poſitus pro x in compoſità efficiet pariter, ut ea evadat $= 0$; quidquid enim ex ea poſitione proveniat in aliis factoribus, ſi unus ex iis evadit $= 0$, productum debet pariter eſſe $= 0$, cum nihilum multiplicatum per quancunque quantitatem adhuc remaneat nihilum.

240. Æquationis $x^2 - 6x + 8 = 0$ radices (per num. 209) ſunt $+ 2$ & $+ 4$, æquationis $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ ſunt (per num. 238) $- 1 + 1 + 3$. Ex earum multiplicatione oritur æquatio $x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 15x^2 - 26x + 24 = 0$, atque hujus radices ſunt $+ 2$, $+ 4$, $- 1$, $+ 1$ $+ 3$, ut patebit hos valores ſubſtituendo pro x.

241. Hinc autem, ut fructum aliquem jam capiat Tyro, facile eſt invenire problemata, quæ ſolvantur tantummodo per datas quaſdam quantitates. Si quæratur problema aliquod, quod ſolvatur tantummodo per numeros 4, & 2, fiat $x = 4$, adeoque $x - 4 = 0$, & pariter $x = 2$, adeoque $x - 2 = 0$: multiplicentur æquationes $x - 4 = 0$, $x - 2 = 0$, & fiat æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$, ſive tranſponendo $x^2 + 8 = 6x$. Quæratur igitur, qui ſit is numerus, cujus quadrato ſi addatur 8, fiet ejus ſextuplum: & nullis aliis

numeris

numeris id conveniet præter illos duos 4, & 2. Eadem autem pacto multiplicatis pluribus æquationibus simplicibus habentibus pro radice numeros quoſcumque invenientur problemata ſolvenda per eoſdem eruta ex æquationibus earum multiplicatione ortis.

242. Eruitur ſecundo loco, coefficientem ſecundi termini eſſe ſummam radicum omnium acceptarum cum ſignis contrariis, coefficientem tertii ſummam productorum omnium e binis, coefficientem quarti ſummam productorum e ternis, ac poſtremum terminum eſſe productum ex omnibus ſimul, ut patet ex iis, quæ dicta ſunt. Inde autem conſequitur, ſi radices omnes aſſumantur cum ſuis ſignis, ſummam omnium æquari coefficienti ſecundi termini accepto cum ſigno contrario, ſummam productorum e binis coefficienti tertii accepto cum ſuo ſigno, ſummam productorum ex ternis coefficienti quarti accepto cum ſigno contrario, & ita porro; productum autem ex omnibus poſtremo accepto cum ſuo ſigno, vel cum contrario, prout æquatio fuerit gradus paris, vel imparis: quia nimirum mutato ſignorum producentium numero impari, mutatur ſignum producti, mutato numero ſignorum pari, manet (per num. 26).

243. Id locum habere in æquationibus ſecundi gradus oſtendimus num. 216. Æquationis tertii gradus $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ radices (per num. 238) ſunt -1, $+1$, $+3$, eædem acceptę cum ſigno contrario ſunt $+1$, -1, -3: Harum ſumma $= -3$, ſumma productorum ex binis $(-1 \times +1) + (-1 \times -3) + (+1 \times -3) = -1 + 3 - 3 = -1$, productum ex omnibus $+1 \times -1 \times -3 = 3$, & -3, -1, $+3$ ſunt coefficiens ſecundi termini, coefficiens tertii, ac ultimus terminus. Contra vero $-1 + 1 + 3 = 3$, $(-1 \times +1) + (-1 \times +3) + (1 \times 3) = -1 - 3 + 3 = -1$, $-1 \times +1 \times +3 = -3$, quare 3, -1, -3 reſpondent illis -3, -1, $+3$ ita, ut ſignum ſecundi maneat, reliquorum mutetur.

244. Hinc vero ſi radices æquationis aliæ ſint poſitivæ, aliæ negativæ, & ſe mutuo deſtruant, deerit ſecundus terminus; & viceverſa; ac idem dicendum de productis ex multiplicatione binarum, ternarum &c. acceptatum cum ſignis contrariis. Nam ſi ea ſumma evaneſcat, coefficiens fit $= 0$, & terminus deeſt, ac ſi terminus deeſt, coefficiens eſt $= 0$, & illa ſumma evaneſcit.

245. In æquatione $x^3 - 7x + 6 = 0$ radices ſunt $+ 1$; $+ 2$, $- 3$, ut ſubſtitutio oſtendet: eſt autem $1 + 2 - 3 = 0$.

246. Si autem aliquot æquationis radices fuerint $= 0$, deerunt totidem termini ultimi æquationis, & ſi aliquot ultimi æquationis termini deſint, totidem radices erunt $= 0$. Nam poſtremus terminus cum ſit productum ex omnibus radicibus cum contrario ſigno acceptis, erit $= 0$, ſi aliqua e radicibus ſit $= 0$; coefficiens penultimi termini debet eſſe ſumma productorum omnium, quæ habentur, ubi aſſumuntur omnes radices præter unam, antepenultimi, ubi omnes præter duas, & ita porro. Quare illa omnia producta habebunt aliquem factorem $= 0$, ſi pluſquam una radix ſit $= 0$, hæc, ſi pluſquam duæ, & ita porro. Contra ultimus terminus non poteſt eſſe $= 0$, niſi aliquis e factoribus ſit $= 0$; ac eo caſu in productis pertinentibus ad coefficientem penultimi termini, ea, quæ habebunt illam radicem $= 0$, erunt omnia $= 0$, & remanebit productum ex omnibus radicibus præter illam, quod non poterit evaneſcere, niſi inter eas radices etiam aliqua alia ſit $= 0$, & pariter in antepenultimo tum factis $= 0$ iis omnibus productis, quæ ingreditur utralibet ex iis binis radicibus, remaneat tantummodo productum ex reliquis; ut id ipſum deſit, debet alia ex iis radicibus, pariter priores duas, eſſe $= 0$, & ita porro.

247. In æquatione $x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 = 0$ carente binis poſtremis terminis radices ſunt $- 1$,

$+ 1$

$+1$, $+3$. 0, 0, ut patebit ſubſtituendo, & multiplicatis $x+1=0$, $x-1=0$, $x-3=0$, $x-0=0$, $x-0=0$, redit ea æquatio.

248. Quod ſi in æquatione quavis mutentur ſigna radicum omnium, mutabuntur tantummodo alterna terminorum ſigna. Nam ſumma earum cum ſigno contrario acceptarum erit eadem, ſed ſignum ejus tantummodo mutabitur; producta autem ex binis, ternis &c. manebunt pariter eadem, ſed in productis ex numero pari earundem, mutato ſigno omnium, ſignum producti manet, in productis ex numero impari mutatur, ut patet nam in quovis producto ſi mutetur ſignum unius factoris, mutatur ſignum producti, quare ſi mutetur etiam ſignum ſecundi, redit in priorem valorem, ſi tertii iterum mutatur, & ita porro. Ac proinde ſignum ſecundi termini mutabitur, tertii manebit, quarti mutabitur, & ita porro.

249. Æquationis $x^3-3x^2-x+3=0$ radices ſunt -1, $+1$, $+3$ (per num. 238) Mutentur ſigna alternorum terminorum, & fiet æquatio $x^3+3x^2-x+3=0$, cujus radices ſunt $+1$, -1, -3, ut patebit ſubſtituendo. In æquatione $x^3-7x+6=0$ radices ſunt $+1$, $+2$, -3: mutatis alternis ſignis fit æquatio x^3-7x-6, nam $-7x$ eſt terminus tertius non ſecundus, qui in ea deeſt ob coefficientem $=0$, & radices jam ſunt -1 -2 $+3$, ut pariter patebit ſubſtituendo.

250. Præterea eruitur, ſi omnes radices ſint negativæ, omnium terminorum ſigna fore poſitiva, ſi omnes ſint poſitivæ, alterna fore poſitiva, & negativa. Nam in primo caſu radices aſſumptæ cum ſigno contrario erunt omnes poſitivæ, adeoque omnia producta poſitiva, in ſecundo omnes negativæ, adeoque producta ex numero pari earundem poſitiva, producta ex numero impari negativa.

251.

251. In æquatione $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$ radices ſunt -1, -2, -4; at in æquatione $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ radices ſunt $+1$, $+2$, $+4$, ut patebit ſubſtituendo.

252. Monuimus num. 218., generaliter eſſe omnium æquationum proprietatem, ut tot habeantur radices negativæ, quot habentur in terminis ſe ordine ſuo excipientibus continuationes ſignorum, tot poſitivæ, quot habentur mutationes: ſed id nondum generaliter demonſtrari potuiſſe, quod ſciamus, & ſola inductione deprehendi. Porro illud hic addendum tantummodo, regulam generalem eſſe, ubi omnes radices reales ſint; nam imaginariæ plerumque poſſunt haberi, ut libet, pro negativis, vel poſitivis, immo revera nec poſitivæ ſunt, nec negativæ, ſed impoſſibiles.

253. In æquatione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ in qua ſunt binæ mutationes ſignorum in tranſitu a primo termino ad ſecundum, & tertio ad quartum, ac una continuatio a ſecundo ad tertium, binæ radices $+1$, $+3$ ſunt poſitivæ, & tertia -1 negativa.

254. Hæc ex illa geneſi deducuntur pertinentia ad quamvis æquationem determinatam rite ordinatam, & redactam ad formam debitam, ut & alia multa deduci poſſent, quæ minoris ſunt uſus. At ſi præterea æquatio omni fractione careat, alias habet proprietates non omittendas.

255. In primis ejuſmodi æquatio nullam habet radicem realem, & rationalem vere fractionariam, quod facile demonſtratur, ope hujus theorematis ſatis manifeſti: Fractio, in qua numerator per denominatorem dividi non poteſt, ut poteſt in fractione $\frac{8}{4}$, quæ reducitur ad 2, conjuncta cum alia quantitate non poteſt evadere quantitas integra, niſi etiam illa alia cum qua conjungitur ſit fractio eundem denominatorem

rem habens. Sit fractio $\frac{8}{3}$, vel $2\frac{2}{3}$ ad hoc ut conjuncta cum alio numero contineat numerum integrum; debet in illo alio numero adeſſe $\frac{1}{3}$, quod cum priore fractione $\frac{2}{3}$ unitatem compleat, adeoque ſi conjugatur ex: gr: cum $5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$, fiet $\frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 2\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 8$.

256. Multiplicetur jam æquatio $x^{m} + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c. . . . $+ d = 0$ per æquationem $x + \frac{n}{r} = 0$: fiet æquatio

$$x^{m+1} + ax^{m} + bx^{m-1} \text{ \&c. } \ldots$$
$$+ \frac{n}{r}x^{m} + \frac{an}{r}x^{m-1}$$

$+ \frac{dn}{r} = 0$. Porro ut coëfficiens ſecundi termini $a + \frac{n}{r}$ ſit quantitas integra, debet a habere eundem denominatorem r. Erit igitur a æqualis cuipiam valori $\frac{p}{r}$. Quare $\frac{an}{r} = \frac{pn}{r^2}$. Hinc ad hoc, ut coëfficiens tertii termini $b + \frac{am}{r}$, ſive $b + \frac{mp}{rr}$ ſit valor integer, oportebit b habeat denominatorem rr, & ſit æqualis alicui valori $\frac{q}{r^2}$. Eodem pacto æquationis $x^{m} + a x^{m-1} + b x^{m-2}$ &c. . . . $+ d$, coëfficiens quarti termini debebit habere denominatorem r^3, quinti r^4, poſtremi r^m. Erit igitur d æqualis alicui valori $\frac{z}{r^m}$, & poſtremus terminus $\frac{dn}{r}$

novæ

novæ æquationis erit $\frac{nz}{r^{m+1}}$ fractionarius. Ac proinde ſi æquatio multiplicetur per æquationem primi gradus habentem radicem fractionariam, non poteſt evitari in æquatione inde orta fractio, cum eo ipſo, quod ita diſponantur coefficientes, ut in præcedentibus evitetur fractio, in poſtremo termino evitari non poſſit. Quare ſi equatio compoſita nullam fractionem continet, nulla ejus radix rationalis fractionaria erit.

257. Generaliter autem eſt verum, ſi qua fractio adeſt in altera ex binis æquationibus, ſemper aliquam fore etiam in æquatione compoſita, ſed demonſtratio generalis eſt multo operoſior. Hinc vero in æquationibus ab omni fractione liberis, ſi qua radix realis, & rationalis habetur, ea debet eſſe inter diviſores integros ultimi termini, quorum ſi nullus æquationi ſatisfacit, tuto concludi poteſt, nullam radicem ejuſmodi æquationis eſſe rationalem. Nam ultimus terminus coaleſcit ex multiplicatione omnium radicum cum ſigno contrario acceptarum, & quivis numerus, qui eſt diviſor cum uno ſigno, eſt etiam cum oppoſito.

258. In æquatione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, ultimus terminus 3 habet diviſores tantummodo $+1$, -1, $+3$, -3, qui ſi ſubſtituantur pro x, ſatisfaciunt omnes preter ultimum. Quare omnes tres ejus radices facile eruuntur. In æquatione $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$, diviſores ultimi termini ſunt $+1$, -1, $+2$, -2, quibus ſubſtitutis, primus ſatisfacit, cum fiat $1 - 3 + 4 - 2 = 0$, reliquorum autem nullus. Quare ea equatio habet radicem rationalem unicam $+1$.

259. Et hac quidem methodo radices rationales, ſi que ſunt, admodum facile inveniuntur, ubi poſtremus terminus non ita multos diviſores habet. Si autem plures habeat; adhuc non ita difficulter deprehen-

dentur radices rationales; ſi quæ ſint, inveniendo omnes diviſores unius dimenſionis; methodo expoſita num. 74. Nam æquatio, quæ habeat pro radice valorem quemvis $-a$, debet poſſe dividi per æquationem primi gradus $x + a = 0$; cum ex ea componatur.

260. In æquatione $x^3 - 2x^2 - 13x + 20 = 0$, poſtremus terminus 20 nimis multos diviſores habet $+1$, -1, $+2$, -2, $+4$, -4, $+5$, -5, $+10$, -10, $+20$, -20, quos omnes per ſubſtitutionem experiri infinitum eſſet. Ejus diviſor ea methodo num. 75 invenitur unicus $x - 4 = 0$. Quare unica ejus radix rationalis eſt $+4$.

261. Et quidem ſi æquatio $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ dividatur per $x - 1 = 0$, habetur $x^2 - 2x + 2 = 0$, cujus radices methodo numeri 208 ſunt $1 \pm \sqrt{-1}$ ambæ imaginariæ; ſi autem æquatio $x^3 - 2x^2 - 13x + 20 = 0$ dividatur per $x - 4 = 0$, oritur æquatio $x^2 + 2x - 5 = 0$, cujus radices eadem methodo ſunt $-1 \pm \sqrt{6}$ ambæ irrationales.

262. Jam vero ad tranſformationes quaſdam, quæ haberi poſſunt per ſubſtitutiones in omnibus æquationibus ordinatis, & debitam formam redactis, ac ſummo ſæpe uſui ſunt, faciendus gradus.

§. XI.

De tranſformationibus quibuſdam earundem æquationum.

263. IN quavis æquatione determinata radices adhuc incognitæ poterunt multiplicari, vel dividi, augeri, vel minui, ut libuerit.

264. Sit æquatio quævis $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3}$ &c. . . . $+ t = 0$, cujus radices multiplicare oporteat per a. Ponatur $ax = y$, adeo

adeoque $x = \frac{y}{a}$, & hoc valore ſubſtituto, erit $\frac{y^m}{a^m} + \frac{py^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{qy^{m-2}}{a^{m-2}}$ &c. . . . $+ t = 0$; ac multiplicando per a^m, fiet $y^m + apy^{m-1} + a^2qy^{m-2}$ &c. . . . $+ a^m t = 0$. Hæc æquatio habet eoſdem prorſus coefficientes, quos prior ſed multiplicatos per terminos hujus progreſſionis geometricæ 1, a, a^2, a^3 &c.; ejus autem radices omnes ſunt æquales radicibus æquationis præcedentis multiplicatis per a. Quod ſi fiat $a = \frac{1}{b}$, radices dividentur per b, & ſinguli coefficientes erunt multiplicati per terminos progreſſionis $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{b^3}$; ſive diviſi per terminos progreſſionis 1, b, b^2, b^3 &c.

265. Inde eruitur hoc theorema. Si ſinguli termini æquationis ordinatæ multiplicentur, vel dividantur per ſingulos terminos cujuſvis progreſſionis geometricæ incipientis ab unitate, omnes radices æquationis multiplicabuntur vel dividentur, per ſecundum ejuſdem progreſſionis terminum.

266. Æquationis $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ radices (per num. 248) ſunt -1, $+1$, $+3$. Ducatur in terminos progreſſionis 1, 3, 9, 27, & fiet æquatio $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0$, cujus radices erunt illæ eædem multiplicatæ per 3, ſive -3, $+3$, $+9$, ut patebit ſubſtituendo hos valores pro x. Contra æquationis $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0$ diviſis ſingulis terminis per eoſdem terminos 1, 3, 9, 27 redi-

redibit æquatio prior $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, cujus radices æquabuntur radicibus ipſius diverſis per 3.

267. Cavendum tamen, ſi deſit aliquis terminus æquationis, ne perturbetur ordo terminorum progreſſionis geometricæ reſpondentium terminis ipſius æquationis, ſed ii termini progreſſionis, qui reſpondent terminis æquationis vacantibus, omittantur.

268. Æquatio $x^3 - 7x + 6 = 0$ caret ſecundo termino, ſi ee, quæ per num. 245 ſunt ejus radices, $+1$, $+2$, -3 multiplicandæ ſint per 2, oportet in progreſſione 1, 2, 4, 8, omittere ſecundum terminum & fiet $x^3 - 28x + 48 = 0$, æquatio habens pro radicibus $+2$, $+4$, -6, ut patebit ſubſtitutione.

269. Ope hujus theorematis facile æquatio quævis liberari poteſt ab omnibus coefficientium fractionibus. Nimirum multiplicentur ſinguli termini æquationis propoſitæ per progreſſionem geometricam, cujus ſecundus terminus ſit productum ex omnibus omnium ejuſmodi fractionum denominatoribus, & patet ſingulos coefficientium numeratores poſt ejuſmodi multiplicationem debere poſſe dividi per ſuos illos denominatores.

270. Sit æquatio $x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + 6 = 0$. Si aſſumatur progreſſio 1, 4×5, $4 \times 4 \times 5 \times 5$, $4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5$, ſive 1, 20, 400, 8000, fiet $x^3 + \frac{3 \times 4 \times 5}{4} x^2 - \frac{2 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5}{5} x + 6 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 0$, ſive $x^3 + 3 \times 5\, x^2 - 2 \times 4 \times 4 \times 5\, x + 6 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 0$, ſive $x^3 + 15x^2 - 160x + 48000 = 0$, æquatio libera ab omnibus coefficientium fractionibus.

271. Porro ſi denominatores illi aliquos communes diviſores habeant, non erit neceſſarium eos repetere, ſed ſatis eſt ut ſecundum aſſumendæ progreſſionis ter-

terminum ingrediantur, omnes, non communes e factoribus denominatorum omnium, communibus præterea ſemel tantum adjectis.

272. In æquatione $x^3 + \frac{3}{10} x^2 - \frac{7}{6} x + 8 = 0$, quoniam $10 = 2 \times 5$, & $6 = 2 \times 3$, ſatis eſt adhibere $2 \times 5 \times 3$, & fiet $x^3 + \frac{3 \times 2 \times 5 \times 3}{2 \times 5} x^2 - \frac{7 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3}{2 \times 3} x + 8 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 0$, ſive $x^3 + 3 \times 3\, x^2 - 7 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3\, x + 8 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 0$, nimirum $x^3 + 9\, x^2 - 1050\, x + 216000 = 0$.

273. Cavendum tamen novę ęquationis radices, ubi inventæ fuerint, dividendas eſſe per illum ſecundum progreſſionis terminum, ut habeantur radices ęquationis datę. Poſſunt autem in his caſibus tolli fractiones etiam methodo expoſita num. 159, multiplicando omnes æquationis terminos per factum ex omnibus denominatoribus; ſed eo pacto primus terminus haberet, ut notavimus num. 199. ſuum coefficientem, quo ęquatio rite ordinata, & ad debitam formam redacta, carere debet.

274. In æquatione $x^3 + \frac{3}{4} x^2 - \frac{2}{5} x + 6 = 0$, multiplicando per $4 \times 5 = 20$, fit $4 \times 5\, x^3 + \frac{3 \times 4 \times 5}{4} x^2 \; \frac{2 \times 4 \times 5}{5} x + 6 \times 4 \times 5 = 0$, ſive $20\, x^3 + 15\, x^2\; 8\, x + 120 = 0$, ubi æquatio eſt libera a fractionibus, ſed ſi liberetur primus terminus a coefficiente dividendo per 20, fit $x^3 + \frac{15}{20}$

$\frac{15}{20} x^2 - \frac{8}{20} x + \frac{120}{20} = 0$, ſive iterum $x^3 + \frac{3}{4} x^2 - \frac{2}{5} x + 6 = 0$;

275. Hac methodo poteſt aliquando liberari æquatio a radicalibus occurrentibus inter coefficeentium factores, cum nimirum aſſumpto quodam radicali pro primo progreſſionis termino, radicales æquationis multiplicatione, vel diviſione eliduntur, vel complentur, ut radix extrahi poſſit.

276. In æquatione $x^3 + 4 x^2 \sqrt{2} - 6 x - \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$, aſſumpta progreſſione $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$ fit multiplicando $x^3 + 4 \times 2\, x^2 - 12 x - 16 = 0$, ſive $x^3 + 8 x^2 - 12 x - 16 = 0$, & dividendo $x^3 + 4 x^2 - 3 x - \frac{8}{4} = 0$, ſive $x^3 + 4 x^2 - 3 x - 2 = 0$.

277. Hac pariter methodo licet ſæpe ultimum terminum minuere, ita ut pauciores habeat diviſores, quorum ope methodo numeri 257 inveſtigentur radices rationales. Dividendo nimirum terminos æquationis, per terminos progreſſionis geometricæ res ſuccedet quotieſcunque dividi poſſint omnes, & non incurratur in fractiones.

278. Sit æquatio $x^3 - 6 x^2 - 4 x + 24 = 0$; cujus poſtremus terminus 24, habet pro diviſoribus numeros, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, tam poſitive, quam negative ſumptos. Dividantur ſinguli termini per terminos progreſſionis 1, 2, 4, 8, & fiet æquatio $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ habens ſolos quatuor poſtremi termini diviſores $+1, -1, +3, -3$, quorum priores tres æquationi ſatisfaciunt, ut notavimus num. 258. Quare etiam æquationis $x^3 - 6 x^2 - 4 x + 24 = 0$ radices habebuntur iis multiplicatis per 2, eruntque

+ 2,

$+2, -2, +6$, qui ſoli inter tot illos diviſores ſatisfacient queſtioni.

279. Poteſt etiam inverti tota equatio ita, ut poſtremus terminus fiat primus, penultimus fiat ſecundus & ita porro, dividendo unitatem per æquationis radicem, poſito nimirum $x = \frac{1}{y}$. tum ablata fractione habente y pro denominatore.

280. In æquatione $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$ cujus radices ſunt $+2, -2, +6$ (per num. 278) poſito $x = \frac{1}{y}$, fit $\frac{1}{y^3} - \frac{6}{y^2} - \frac{4}{y} + 24 = 0$, ac multiplicando per y^3 fit $1 - 6y - 4y^2 + 24y^3 = 0$, ſive ordinando, ac dividendo per 24, fit $y^3 - \frac{4}{24}y^2 - \frac{6}{24}y + \frac{1}{24} = 0$, cujus equationis radices ſunt $+\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, ut patebit ſubſtituendo.

281. Eo autem pacto radix maxima evadit minima, & viceverſa, ſed ſignum non mutant. Poteſt autem obtineri, ut maxima mutetur in minimam, & minima in maximam etiam augendo, vel minuendo radicem adhuc incognitam, idque ita, ut etiam mutetur ſignum e negativo in poſitivum, vel viceverſa; atque alia etiam multa, & admodum utilia eodem incremento, vel decremento radicum obtinentur. Id autem preſtatur ponendo $x = y + h$, ubi valor y evadit minor, vel major, quam x, prout h fuerit valoris poſitivi vel negativi.

282. Sit æquatio $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ poſito $x = y + h$, & ſubſtituto $\overline{y+h}^3$ pro x^3, $\overline{y+h}^2$ pro x^2, $y+h$ pro x, habebitur ſequens equatio.

$$\begin{array}{llll} y^3 + 3hy^2 & + 3h^2y & + h^3 & = 0. \\ + py^2 & + 2hpy & + h^2p & \\ & + qy & + hq & \\ & & + r & \end{array}$$

283. Si æquatione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, cujus radices (per num. 258) ſunt -1, $+1$, $+3$, libeat augere ſingulas radices per numerum 2, ponatur -3 pro p, -1 pro q, $+3$ pro r, & -2 pro h, collecta ſingulorum coefficientium ſumma, habebitur æquatio $y^3 - 9y^2 + 23y - 15 = 0$, cujus radices erunt $-1 + 2$, $+1 + 2$, $+3$, $+2$, ſive 1, 3, 5, ut patebit ſubſtituendo eos valores pro y.

284. Si autem ita magnus aſſumatur valor h, ut augendo radicem, omnia terminorum ſigna alternentur, jam omnes radices negativæ mutabuntur in poſitivas, ac maxima negativa jam evadet minima poſitiva, vel ſi minuendo, omnia ſigna evadant poſitiva; omnes radices poſitivæ mutabuntur in negativas, & maxima poſitiva evadet minima negativa; ac ſi omnibus ſignis continuatis omnes in primo caſu fuiſſent negativæ, vel omnibus alternatis, omnes in ſecundo poſitivæ, minima etiam utrobique in maximam mutaretur, ut patet, & facile eſt exempla aſſumere, & rem experiri.

285. Licebit eo pacto, etiam limites, intra quos radix aliqua continetur deprehendere. Nam ſi ſubſtitutis diverſis valoribus pro h, accedat una ex alternationibus ſignorum in primo caſu, vel una e continuationibus in ſecundo; una e radicibus mutabitur ibi e negativa in poſitivam, hic e poſitiva in negativam. Quare inter binos ejuſmodi valores h, inter quorum ſubſtitutiones illa mutatio facta eſt, debet conſiſtere aliqua radix, quæ nimirum altero ex illis eliſa non fuerat, altero eliditur, & ſignum contrarium accipit.

286. In æquatione $x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$, habentur binæ alternationes ſignorum in tranſitu a ſecundo termino ad tertium, & a tertio ad quartum, & una continuatio in tranſitu a primo ad ſecundum: facto $x + 2 = y$, ſive $x = y - 2$, habetur æquatio $y^3 - 4y^2 + 3y + 8 = 0$, in qua pariter binæ ſunt alternationes, & una continuatio. Quare nulla radix adhuc e negati-

va

va migravit in poſitivam. Facto autem $x = y - 4$ habetur $y^3 - 10y^2 + 31y - 22 = 0$, ubi jam omnes ſunt alternationes ſignorum; adeoque radix negativa migravit in poſitivam; quæ proinde, ſi realis eſt, debet conſiſtere inter -2, & -4, cum $x + 2$ manſerit negativi valoris, $x + 4$ migraverit in poſitivum. Et quidem patebit ſubſtitutione, ejus æquationis radicem eſſe -3.

287. Licebit præterea ex quavis æquatione admodum facile eliminare ſecundum terminum. Si enim ita aſſumatur valor ille arbitrarius h, ut ſit $3h + p = 0$, ſive $3h = -p$, & $h = -\frac{1}{3}p$, ſecundus terminus omnino evaneſcet; & quoniam generaliter in quavis æquatione $x^m + px^{m-1}$ &c. $= 0$ facto $y + h = x$, haberi debet poſt ſubſtitutionem $y^m + mhy^{m-1}$ &c. $= 0$, patet gene-
$+ py^{m-1}$

raliter eliminari ſecundum terminum, ſi fiat $mh + p = 0$; adeoque $h = -\frac{1}{m}p$; & habebitur hic canon generalis pro eliminando ſecundo termino æquationis ipſius. Aſſumatur nova incognita, cui addatur coefficiens ſecundi termini, diviſus per numerum, qui exprimit gradum æquationis, cum ſigno oppoſito ei, quem habebat ipſe coefficiens, & facta ſubſtitutione, evaneſcet ſecundus terminus.

288. Juxta hunc canonem in æquatione $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$, facto $y + 1 = x$, evaneſcet ſecundus terminus, ut patebit ipſa ſubſtitutione.

$y^3 + 3$

$$\begin{aligned} y^3 + 3y^2 + 3y + 1 &= x^3 \\ -3y^2 - 6y - 3 &= -3x^2 \\ -2y - 2 &= -2x \\ +5 &= +5 \end{aligned}$$

$$y^3 \quad * \quad -5y + 1 = 0$$

289. Quod ſi coefficiens ſecundi termini dividi non poſſit per exponentem illum; adhuc tamen poſſunt fractiones evitari, multiplicando prius juxta num. 265 terminos æquationis ipſius, per terminos progreſſionis geometricæ incipientis ab unitate, cujus progreſſionis ſecundus terminus ſit ille exponens: ut ſi æquatio ſit $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, poteſt multiplicari per 1, 3, 9, 27, & habebitur $x^3 - 6x^2 + 36x - 216 = 0$, & jam 6 poterit dividi per 3, ac aſſumi $y + 2 = x$.

290. Ipſa ſecundi termini eliſione poteſt reſolvi quævis æquatio ſecundi gradus, & formula generali provenit eadem prorſus, quam num. 208 invenimus. Sit enim æquatio $x^2 + px + q = 0$, facto $y - \frac{1}{2} pp = x$, & facta ſubſtitutione invenietur $y^2 - \frac{1}{4} pp + q = 0$.

$$\begin{aligned} y^2 - py + \tfrac{1}{4}pp &= x^2 \\ + py - \tfrac{1}{4}pp &= +px \\ + q &= +q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 \quad * \quad - \tfrac{1}{4} pp &= 0 \\ - q & \end{aligned}$$

---

291. Ac proinde erit $y^2 = \frac{1}{4} pp - q$, & $y = +\surd.$

($\frac{1}{4} pp$

$(\frac{1}{4}pp - q)$, ac $x = y - \frac{1}{2}p = -\frac{1}{2}p + \surd(\frac{1}{4}pp - q)$.

292. Ut autem poſitione $y + h = x$ in æquatione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ eliminavimus num. 287. ſecundum æquationis terminum per æquationem primi gradus $3h + p = 0$, adeoque $h = -\frac{1}{3}p$, ſic poſſet eliminari tertius, ponendo in formula numeri 282, $h^2 + \frac{2}{3}ph + \frac{1}{3}q = 0$, ſed reſolvenda eſſet æquatio ſecundi gradus ad inveniendum valorem h, qui eſſet $= -\frac{1}{3}p \pm \surd(\frac{1}{9}p^2 - \frac{1}{3}q)$ & res ſuccederet, quoties vel valor q non eſſet poſitivus, vel ejus triens non eſſet major quam $\frac{1}{9}p^2$, ne nimirum radix evaderet imaginaria, juxta num. 215.

293. Generaliter autem in omni equationum genere facile demonſtratur, quartum terminum eliminari poſſe per æquationem gradus tertii, quintum per equationem quarti, & ita porro. Poſtremi vero termini eliminatio reſtituit æquationem non ſolum ejuſdem gradus cum ea, e qua eliminari debet quod inde conſequitur, ſed eandem prorſus cum ipſa. Sic in caſu præſenti ad eliminandum poſtremum terminum oporteret in ipſa formula numeri 282 ponere $h^3 + ph^2 + qh + r = 0$, quæ æquatio ab æquatione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ differt ſolo nomine incognitæ, quæ ibi dicitur h, hic x.

294. Poteſt quidem tolli penultimus terminus per ſolam æquationem primi gradus, antepenultimus per equationem ſecundi, & ita porro, invertendo prius æquationis terminos methodo tradita hoc ipſo §. ita, ut primus terminus evaderet ultimus, & viceverſa. In æquatione $x^3 + px^2 + q$

$+qx+r=0$, poſito $x=\frac{1}{y}$, fit $\frac{1}{y^3}+\frac{p}{y^2}+\frac{q}{y}+r=0$, ſive multiplicando per y^3, $1+py+qy^2+ry^3=0$, & ordinando, ac dividendo per r fit $y^3+\frac{q}{r}y^2+\frac{p}{r}y+\frac{1}{r}=0$. In hac æquatione poſito $\frac{q}{3r}=y$ tollitur ſecundus terminus, qui prius fuerat penultimus: & eodem artificio tolluntur poſtremi per eaſdem æquationes, per quas tolluntur primi.

295. Cæterum ſi liceret poſtremum terminum eliminare, dividendo deinde totam æquationem per x, ea deprimeretur ad gradum inferiorem, ac ſenſim liceret æquationes quorumcumque graduum reducere ad primum gradum, ac reſolvere. Pariter ſi liceret terminos ſimul omnes intermedios tollere ope æquationum inferiorum, reſolverentur æquationes utcumque altæ. Nam ablatis terminis omnibus intermediis, relinqueretur $x^m+q=0$, adeoque $x^m=-q$ & $x=\sqrt[m]{-q}$; illa autem inferior reſolveretur per aliam inferiorem eodem pacto, donec deveniretur ad æquationem gradus primi. Sed methodus tollendi omnes terminos intermedios ſimul per æquationes inferiores æquatione propoſita huc uſque non eſt inventa, ac methodus, quam tradidimus, unicum tantummodo eliminat, & ſi nova ejuſmodi ſubſtitutione tentetur eliminatio novi termini, redit ſtatim is, qui eliminatus fuerat, nec niſi in caſu aliquo particulari quorundam coefficientium determinatorum poteſt hujuſmodi methodis eliminari pluſquam unicus terminus manente eodem equationis gradu.

296. Poteſt tamen iterata hac ſubſtitutione in equationibus tertii gradus poſt eliminatum ſecundum terminum, factis poſitionibus aliis quibuſdam, deveniri ad æquationem quandam, que licet ſit gradus ſexti, equivaleat æquationi gradus ſecundi, ac reſolvatur ipſa, &

ejus

ejus ope reſolvatur ęquatio propoſita gradus tertii. Sed de his in ſequenti §.

§. XII.

De æquationibus tertii gradus.

297. ÆQuationum tertii gradus inveſtigationem proponemus fuſiorem aliquanto, profundioremque, quod eam Tyroni jam aliquanto provectiori ad exercendam analyſim utiliſſimam eſſe arbitremur. Agemus autem primum de generalibus quibuſdam ejus proprietatibus, tum de depreſſione quarundam æquationum ad gradum inferiorem, ac deinde de radicum adhuc incognitarum proprietatibus quibuſdam in æquatione a ſecundo termino liberata, & relatione radicis maximę, vel, ubi binæ imaginarię ſunt, radicis unicæ ad quantitates cognitas ęquationem ingredientes, ubi ſe ſponte offerent ſolutio ęquationum habentium binas radices ęquales, limites radicum ęquationum omnium habentium radices inæquales, & indicium, quo noſſe liceat, an omnes radices ſint reales, an binę imaginarię. Tum progrediemur ad ſolutionem ęquationis carentis etiam tertio termino, deinde ad ſolutionem ęquationis eodem affectę, ubi inventa generali trium radicum expreſſione proponemus varios methodos liberandi eandem ab imaginarietate, quæ ſe realium etiam radicum expreſſioni immiſcet, ac inveniendi per approximationem radices ipſas, quibus expoſitis, proponemus reductionem æquationum quarundam gradus noni ad tertium, ac ea utemur ad inveniendam radicem cubicam binomii conſtantis parte rationali, & parte irrationali.

298. In primis æquatio tertii gradus poteſt habere omnes tres radices reales, vel unam realem, & duas imaginarias. Componi enim poteſt e binis, altera gradus primi, quę ſemper radicem realem habet, altera gradus ſecundi, quę binas vel reales habere poteſt, vel imaginarias.

299. Æqua-

299. Æquatio $x^3 - 6x^2 + 3x + 20 = 0$ componitur ex multiplicatione equationis primi $x - 4 = 0$ habentis radicem realem 4, & equationis ſecundi $x^2 - 2x - 5 = 0$ habentis binas radices reales $1 + \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$. Quare habet etiam ipſa tres radices reales 4, $1 + \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$. At equatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0$ componitur ex eadem primi $x - 4 = 0$, & ex alia ſecundi $x^2 - 2x + 5 = 0$ habente binas radices imaginarias $1 + \sqrt{-4}$, $1 - \sqrt{-4}$. Quare ipſa habet binas radices imaginarias $1 + \sqrt{-4}$, $1 - \sqrt{-4}$, & unam realem 4.

300. Quotieſcunque autem binæ radices erunt imaginariæ, radix realis habebit ſignum contrarium ſigno poſtremi termini. Nam æquatio ſecundi gradus, ut habeat binas radices imaginarias, debet habere poſtremum ſuum terminum poſitivum. Productum igitur omnium trium radicum habebit ſignum conforme ſigno radicis realis, cui producto cum æquetur poſtremus terminus æquationis tertii gradus acceptus cum ſigno contrario juxta §. 10, habebit is poſtremus terminus ſigum contrarium ſigno radicis realis.

301. Æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0$ compoſita (per num. 299) ex binis $x - 4 = 0$, $x^2 - 2x + 5 = 0$ habet, ut ibi vidimus, radicem unicam realem 4 poſitivam, & ejus poſtremus terminus -20 habet ſignum negativum. Æquatio $x^3 + 2x^2 - 3x + 20 = 0$ compoſita ex binis $x + 4 = 0$, $x^2 - 2x + 5 = 0$ habet unicam radicem realem illius prioris -4 negativam, & ejus poſtremus terminus $+20$ habet ſignum poſitivum.

302. Quod pertinet ad depreſſionem æquationum tertii gradus, eæ, quæ componuntur ex inferioribus irrationalitate carentibus, in hoc, ut in quovis alio gradu, per diviſionem deprimi poſſunt ad gradum inferiorem,

rem, ut monuimus num. 193. Sed cum ſuperiores æquationes deprimi poſſint etiam per diviſores plurium dimenſionum; æquationes gradus tertii, ſi poſſunt deprimi, debent habere etiam diviſorem dimenſionis ſimplicis ejus formæ $x + a$; de ejus inventione egimus §. 3. Nam æquationes quarti gradus componi poſſunt ex binis ſecundi; at æquationes gradus tertii vel componuntur ex tribus æquationibus gradus primi, vel ex binis altera primi, altera ſecundi. Quare ſi nullus diviſor invenitur in æquationibus numericis gradus tertii carentibus irrationalitate, & fractione methodo numeri 75, ſive ſi nullam habent rationalem radicem inventam methodo numeri 259, in propria ſede omnino ſunt, & deprimi non poſſunt.

303. Æquatio $x^3 - 6x^2 + 3x + 20 = 0$ dividi poteſt per $x - 4$ (per num. 299.) prodeunte quoto $x^2 - 2x - 5 = 0$. Quare reſolvitur in duas $x - 4 = 0$, $x^2 - 2x - 5 = 0$, & habet ex prima radicem $x = 4$, e ſecunda binas radices $x = 1 + \sqrt{6}$, $x = 1 - \sqrt{6}$. At æquatio $x^3 - 6x^2 + 3x + 3 = 0$ deprimi non poteſt; cum e quatuor diviſoribus poſtremi termini $1, -1, 3, -3$ nullus æquationi ſatisfaciat.

304. Ad æquationes, quæ per diviſionem deprimi poſſunt, pertinet caſus, in quo ultimus terminus deſit: tunc enim (per num. 246) una e radicibus debet eſſe $= 0$, & æquatio deprimitur ad ſecundum gradum, dividendo per x.

305. Si ſit $x^3 + px^2 + qx = 0$, dividendo per x erit $x^2 + px + q = 0$, ut ſi ſit $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$, erit $x^2 - 2x - 5 = 0$, cujus æquationis radices cum ſint $x = 1 \pm \sqrt{6}$, æquatio propoſita habebit tres radices $x = 0$, $x = 1 + \sqrt{6}$, $x = 1 - \sqrt{6}$.

306. Ut autem progrediamur ad methodos generales reſolvendi æquationes tertii gradus, ſive eæ deprimi poſ-

ſint,

ſint, ſive non poſſint; in primis methodo numeri 287 auferatur ſecundus terminus, ſi eo æquatio propoſita non careat, & reducetur ad hanc formam $x^3 + qx + r = 0$, in qua contemplanda nonnihil immorabimur.

307. In æquatione ejus formæ quævis e tribus radicibus debet æquari reliquarum ſummæ cum ſigno contrario acceptæ, quod eſt commune æquationibus omnibus ſecundo termino carentibus, in quibus nimirum ſumma omnium radicum $= 0$ juxta num. 244. Quare binæ ex iis debent eſſe negativæ, & una poſitiva, vel binæ poſitivæ, & una negativa, cum ſine ſignorum oppoſitione illa eliſio haberi non poſſit, & bina ſigna per tres radices diſtribui non poſſint, niſi ita, ut una habeat alterum, alterum autem reliquæ binæ. Illa autem, quæ habebit ſignum contrarium ſigno reliquarum, debebit eſſe major ſingulis, a quibus nimirum cum eodem ſigno in unam ſummam coaleſcentibus eliditur, adeoque erit omnium maxima. Quamobrem ipſa maxima radix habebit ſignum contrarium ſigno poſtremi termini r, cum nimirum reliquarum productum ſignum conforme habentium debeat ſemper eſſe poſitivum, adeoque productum omnium, ſive poſtremus terminus r cum ſigno contrario acceptus debeat ſequi ſignum radicis maximæ. Quod ſi binæ radices fuerint imaginariæ, radix illa unica realis habenda erit pro maxima, cum productum poſitivum imaginariarum oſtendat, eas habendas eſſe pro ſimul negativis, vel ſimul poſitivis, & argumento inde deducto oſtenſum ſit num. 300, radicem realem habere ſignum contrarium ſigno poſtremi termini.

308. Æquatio $x^3 - 28x + 48 = 0$ habet pro radicibus $+2$, $+4$, -6, ut patebit ſubſtituendo. Eſt autem $2 + 4 = 6$, $2 - 6 = -4$, $4 - 6 = -2$; nimirum ſumma binarum quarumcunque cum ſigno contrario accepta æquatur tertiæ. Sunt vero binæ poſitivæ $+2$, $+4$, & una negativa -6, atque hæc ſolitaria eſt omnium maxima, & habet ſignum contrarium ſigno poſtremi termini $+48$. Exemplum æquationis habentis binas radices

imagi-

maginarias, & ſignum radicis realis contrarium ſigno oſtremi termini dedimus num. 301.

309. Quod ſi in æquatione tertii gradus carente ſecundo termino binæ radices habentes ſignum conforme ierint æquales inter ſe; ſingulæ æquabuntur dimidio adicis maximæ cum ſigno contrario acceptæ, cum nimirum ambæ ſimul ipſi toti æquales eſſe debeant. Et quoniam illa tertia radix debet eſſe realis, ac radicis realis dimidium reale eſt; patet, binas radices imaginarias in hujuſmodi æquationibus nunquam fore inter ſe æquales.

310. In caſu autem binarum radicum æqualium coefficiens tertii termini debet continere tres quadrantes quadrati radicis maximæ, & habere ſignum negativum, poſtremus autem terminus continebit quadrantem cubi radicis maximæ. Si enim radix maxima dicatur $2a$, erit ejus quadratum $4aa$, & cubus $8aa$. Porro ſingulæ e radicibus minoribus erunt $= -a$. Productum earum erit aa, quod ob ſigna earum conformia erit ſemper poſitivum; productum autem maximæ cum utralibet erit $-2aa$, quod ob contrarietatem ſignorum habebit ſemper ſignum negativum. Quare ſumma productorum, quæ equatur coefficienti tertii termini, erit $-2aa, -2aa, + aa = -3aa$, ſemper negativa, & equalis tribus quadrantibus quadrati $4aa$ radicis maximę. Productum autem omnium ſimul erit $aa \times 2a = 2a^3$ quadrans cubi $8a^3$.

311. In eodem caſu binarum radicum ęqualium erit cubus tertię partis coefficientis tertii termini acceptus cum ſigno contrario ęqualis quadrato dimidii poſtremi termini, ſive $-\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}rr$. Eſt enim (per num. 310) ille coefficiens $-3aa$; ac poſtremus terminus $2a^3$ Quare $\frac{1}{3}q = -aa$, $\frac{1}{2}r = a^3$, ac proinde illius cubus $= -a^6$, hujus quadratum $= a^6$.

312. Quare ſi in equatione tertii gradus carente ſecundo termino, fuerit $-\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}rr$, ſive $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 0$, æquatio habebit binas radices minores inter ſe equales, & invenietur radix maxima ſumendo vel $\sqrt{(-\frac{4}{3}q} = 2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)}$, vel $\sqrt[3]{(-4r)}$, ac præmittendo ſignum contrarium ſigno poſtremi termini r; minores vero radices invenientur ſumendo dimidium maximæ cum ſigno contrario.

313 In æquatione $x^3 - 12x + 16 = 0$ eſt $q = -12$, $r = 16$. Quare $\frac{1}{3}q = -4$, $\frac{1}{2}r = 8$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 64 - 64 = 0$. Ea igitur æquatio habet binas radices minores æquales. Radix maxima eruta e formula $2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)} = 2\sqrt{4} = 2 \times + 2$, erit -4 præfixo ſigno negativo, quod eſt contrarium ſigno poſtremi termini $+16$, & eadem eruitur ex formula $\sqrt[3]{(-4r)} = \sqrt[3]{(-4 \times 16)} = \sqrt[3]{(-64)} = -4$. Reliquæ autem erunt $+2$, $+2$. Eas vero eſſe ejus æquationis radices, patebit ſubſtituendo, vel multiplicando per ſe invicem $x + 4 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 2 = 0$. Patent igitur in hac equatione quecunque diximus de caſu binarum radicum equalium, & uſus eorundem ad inveniendas ejuſmodi equationum radices.

314. Quod ſi bine radices ſignum conforme habentes fuerint inequales, ſed reales; adhuc coefficiens tertii termini ſemper erit negativus, poſtremus terminus opponetur ſigno radicis maxime, & quadratum radicis maxime erit minus quatuor trientibus illius, majus autem ipſo accepto cum ſigno contrario, cubus vero major quadruplo poſtremo termino, ſive erit radix maxima minor quam $\sqrt{(-\frac{4}{3}q)}$,

$\left(\frac{4}{3}q\right)$, major tamen, quam $\sqrt{-q}$; & major quam $\sqrt{(-4r)}$:

315. Si enim ſint radices minores $-a+b$, $-a-b$, quarum ſumma cum ſit $-2a$, erit radix maxima $2a$, illarum productum erit $aa-bb$, producta maximæ cum ſingulis $-2aa+2ab$, $-2aa-2ab$, ac proinde productorum ſumma $aa-bb-4aa=-3aa-bb$, productum autem omnium $2a(aa-bb)=2a^3-2abb$: Quare erit $q=-3aa-bb$, qui ob quadrata aa, bb realium quantitatum ſemper poſitiva, erit valor ſemper negativus, at $r=-2a(aa-bb)$, erit valor ſemper contrarius valori a, nam ob radicem $-a-b$ minorem maxima $2a$ negative accepta, debet eſſe b minor quam a, adeoque $aa-bb$ valor ſemper poſitivus, & $2a(aa-bb)$ ejuſdem ſigni cum a, ac $-2a(aa-bb)$ ſigni oppoſiti, quod quidem etiam num. 307 demonſtratum fuerat, nimirum poſtremum terminum ſequi ſignum oppoſitum ſigno radicis maximæ. Cum vero ſit $-\frac{1}{3}q=aa+\frac{1}{3}bb$; erit $-\frac{4}{3}q=4aa+\frac{4}{3}bb$, quo valore eſt minus quadratum radicis maximæ $4aa$: Sed ob bb minorem aa, erit $3aa+bb$, ſive $-q$ minus, quam $4aa$, nimirum quadratum idem $4aa$ majus coefficiente q accepto cum ſigno contrario. Demum valor $r=-2a(aa-bb)$ erit minor, quam $2a^3$ ob $aa-bb$ minorem, quam aa, adeoque $4r$ minus, quam $8a^3$ cubus radicis maximæ.

316. Quod ſi binæ illæ radices fuerint imaginariæ, coefficiens tertii termini poterit eſſe vel poſitivus, vel negativus; & ſi negativus fuerit, quadratum radicis realis erit majus quatuor ejus trientibus, cubus vero ejuſdem minor quadruplo poſtremi termini accepti cum ſigno contrario.

317. Nam in caſu radicum imaginariarum erit b radix quantitatis negative, adeoque bb quantitas negativa, &

$-bb$ poſitiva; ac proinde tertii termini coefficiens $q = -3aa - bb$ vel reducetur ad quantitatem poſitivam, ſi terminus poſitivus $-bb$ eliſerit negativum $-3aa$, vel eo exiſtente minore, manebit quantitas negativa, minor tamen, quam $3aa$, ſive minor, quam tres quadrantes quadrati $4aa$ radicis maximæ. At $aa - bb$ erit quantitas poſitiva ob aa ſemper poſitivum, & $-bb$ pariter poſitivum in hoc caſu, ac erit major quam aa, adeoque $2a \times (aa - bb)$ ſive $-r$ erit quantitas major, quam $2a^3$, ſive major, quam quadrans cubi $8a^3$ radicis ejuſdem.

318. Porro hinc infertur quantitatem illam $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ quæ in caſu binarum radicum æqualium num. 312 fuerat $= 0$, in caſu binarum radicum imaginariarum fore ſemper poſitivam, in caſu omnium realium negativam. Nam demonſtratum eſt num. 315. in caſu radicum omnium realium facta radice maxima $= 2a$ fore $4a^2$ minorem, quam $-\frac{4}{3}q$, & $8a^3$ majorem quam $4r$. Quare erit a^2 minor quam $-\frac{1}{3}q$, & a^3 major, quam $\frac{1}{2}r$, ac proinde ibi cubando, hic quadrando, erit a^6 minor, quam $-\frac{1}{27}q^3$ & idem a^6 major quam $\frac{1}{4}rr$, ac proinde $-\frac{1}{27}q^3$ major, quam $\frac{1}{4}rr$, & exiſtente q in eo caſu ſemper negativo, erit $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$, quantitas negativa. In caſu autem binarum radicum imaginariarum, ſi q eſt valoris negativi prorſus contrarium accidet, cum demonſtratum ſit num. 317, eſſe $4a^2$ majorem quam $-\frac{4}{3}q$, & $8a^3$ minorem, quam $4r$. Quod ſi q fuerit valoris poſitivi, patet $\frac{1}{4}$

rr +

$rr + \frac{1}{27} q^3$ fore quantitatem penitus poſitivam.

319. Hoc theorema magno deinde futurum uſui ſic etiam immediate demonſtratur. Capiatur æquatio ſecundi gradus

$$\begin{array}{l} x^2 + 2ax + aa = 0, \\ \qquad\qquad\quad -3c \end{array}$$

cujus radices cum ſint $-a + \sqrt{-3c} \ldots\ldots -a - \sqrt{3c}$, ea continebit binas radices reales, vel binas imaginarias prout c fuerit valoris negativi, vel poſitivi, nimirum prout $-3c$ fuerit e contrario valoris poſitivi, vel negativi. Ea, ut efficiat æquationem tertii gradus carentem ſecundo termino, debet duci in æquationem $x - 2a = 0$; ac exurget æquatio tertii gradus

$$\begin{array}{l} x^3 - 3aax - 2a^3 = 0. \\ \qquad\; - 3cx + 6ac \end{array}$$

In hac æquatione erit $q = -3aa - 3c$, $r = -2a^3 + 6ac$; ac proinde $\frac{1}{3} q = -aa - c$, $\frac{1}{2} r = -a^3 + 3ac$, $\frac{1}{27} q^3 = -a^6 - 3a^4 c - 3a^2 c^2 - c^3$, & $\frac{1}{4} rr = a^6 - 6a^4 c + 9a^2 c^2$. Quare $\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3 = -9a^4 c + 6^2 c^2 - c^3 = -c \times (9a^4 - 6a^2 c + c^2) = -c(3a^2 - c)^2$, qui valor, ob quadratum $(3a^2 - c)^2$ ſemper poſitivum, erit poſitivus, vel negativus, prout e contrario valor c fuerit negativus, vel poſitivus, ſive prout binæ æquationis radices imaginariæ fuerint, vel omnes reales.

320. Ut in exemplis numericis ab hoc poſtremo ſumamus exordium, in æquatione $x^3 - 30x + 36 = 0$, quęratur, an omnes radices ſint reales, an binę imaginarię. In ea eſt $r = 36$, $\frac{1}{2} r = 18$, $q = -30$, $\frac{1}{3} q = -10$, $\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3 = 324 - 1000 = -676$. Cum

igitur ea quantitas ſit negativa, omnes ejus æquationis radices reales ſunt. At in æquatione $x^3 + 3x - 14 = 0$ ex eo ipſo, quod tertius terminus ſit poſitivus, conſtat, binas radices eſſe imaginarias. Quod ſi eſſet $x^3 - 3x - 14 = 0$, eſſet $\frac{1}{2}r = -7$, $\frac{1}{3}q = -1$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 49 - 1 = 48$, quæ quantitas cum ſit poſitiva, infertur, adhuc binas ejus radices eſſe imaginarias.

321. Jam vero primæ æquationis $x^3 - 30x + 36 = 0$ radix maxima debet eſſe minor quam $2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)}$ & major, quam $\sqrt{-q}$, ut etiam major, quam $\sqrt[3]{4r}$: nimirum debet eſſe minor, quam $2\sqrt{10}$, ſive, quam $\sqrt{40}$, & major, quam $\sqrt{30}$, qui ſunt limites ſatis arcti, ut pariter debet eſſe major, quam $\sqrt[3]{36}$. Hinc cum reliquæ radices debeant eſſe minores ipſa maxima, quævis ejus æquationis radix debet eſſe minor, quam $\sqrt{40}$, quod, ubi ope diviſorum poſtremi termini 36 quæritur an ulla habeatur radix rationalis, excluderet 36, 12, 9, & relinqueret tentandos tantum 6, 4, 3, 2, 1. Sed ſi radix ipſa maxima forte ſit rationalis, ea concluſa inter limites $\sqrt{40}$, $\sqrt{30}$, alia eſſe non poteſt niſi 6, & ea ipſa cum ſigno negativo ob poſtremum terminum $+36$ poſitivum. Et quidem ſubſtituto -6 equationi ſatisfit, ac ea diviſa per $x+6$ relinquit $x^2 - 6x + 6 = 0$, cujus radices $3+\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$. Quare propoſitę ęquationis radices omnes reales ſunt -6, $3+\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$, quarum prima illa maxima eſt. Ejus autem quadratum 36 & eſt minus; quam $-\frac{4}{3}q$ ſive quam 40, & eſt majus, quam $-q$, ſive quam 30, ac pariter ejus cubus 216 major, quam $4r$, ſive quam 144.

322. Secundæ autem æquationis $x^3 + 3x - 14 = 0$ radix realis unica debet eſſe minor, quam $\sqrt[3]{4r}$, nimirum minor, quam $\sqrt[3]{-56}$, adeoque adhuc minor, quam $\sqrt[3]{64}$, nimirum minor, quam 4. Quare cum ea, ſi rationalis eſt, debeat eſſe inter diviſores poſtremi termini 14, & ob -14 negativum, debeat eſſe poſitiva, vel erit 1, vel 2. Hæc ſecunda ſatisfacit æquationi, ac inſtituta diviſione per $x - 2$, invenitur $x^2 + 2x + 7 = 0$, cujus radices imaginariæ $-1 \pm \sqrt{-6}$: radicis autem 2 cubus 8 minor eſt, quam $4r = 56$.

323. Demum in tertia æquatione $x^3 - 3x - 14 = 0$ radix unica realis debet non ſolum eſſe minor quam $\sqrt[3]{4r}$, ſive quam $\sqrt[3]{56}$, ſed etiam major quam $2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)}$, ſive quam $2\sqrt{1}$, vel quam 2. Quare debet eſſe minor, quam 4, major quam 2, adeoque non poteſt eſſe niſi ± 3, qui numerus cum non habeatur inter diviſores poſtremi termini 14, ea æquatio rationalem radicem non habet, nec poteſt deprimi per diviſionem.

324. His perſpectis progrediamur ad caſum; in quo in formula generali $x^3 + qx + r = 0$, elimito ſecundo termino, deſit etiam tertius, ac exiſtente $q = 0$ reducatur ad formam $x^3 + r = 0$. Hujuſmodi æquatio reſolvetur methodo expoſita num. 165 vel 204; erit enim $x^3 = -r$, & $x = \sqrt[3]{-r}$. Hæc autem expreſſio continebit tres valores, unum realem, cum (per num. 31) unica ſit radix realis cubica, & binas imaginarias ejus formæ, quam invenimus num. 97, nimirum ſi ponatur $r = -a^3$, erit $x^3 = a^3$ & tres valores erunt $x = a$, $x = a \times$

$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $x = a \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.)

325. Hujuſmodi autem binæ radices imaginariæ ex ipſa æquatione $x^3 - a^3 = 0$ facile deducuntur; ac ſimul colligitur nullas alias haberi præter eas tres tertias radices. Cum enim ex ea æquatione eruatur $x^3 = a^3$, & $x = a$, ſi ea ipſa dividatur per $x - a$, prodit æquatio $x^2 + ax + a^2 = 0$, qua reſoluta (per num. 228) habetur $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-\frac{3}{4}aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a\sqrt{-3} = a \times (\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2})$. Quare ſi eſt $x^3 = a^3$, adeoque, $x^3 - a^3 = 0$, debet x habere unum ex iis tribus valoribus.

326. Si ſit $a = 1$, erunt tres unitatis radices tertiæ 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ac quantitatis cujuſvis radices tertiæ habebuntur, ſi ejus radix realis ducatur in hoſce tres valores. Numeri 64 radices tertiæ erunt 4×1, $4 \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $4 \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

327. Porro harum etiam imaginariarum radicum uſus nobis jam occurret in reſolutione æquationum affectarum tertio termino, ac proinde non erit abs re eas conſiderare diligentius.

328. In primis ſingularum e radicibus 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ cubus erit 1. ut de prima patet, de reliquis videbimus §. 4. Deinde binarum imaginariarum ſumma eſt -1,

cum

tum ſit $\frac{-2}{2}$; productum autem eſt 1; cum ſit
$\frac{1+\surd-3-\surd-3+3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4}$. Id autem patet etiam ex eo, quod eæ radices oriantur ex æquatione $x^2 + ax + aa = 0$, ſive poſito 1 pro a, $x^2 + x + 1 = 0$, cujus coefficiens ſecundi termini, ſive ſumma radicum cum contrario ſigno acceptarum eſt 1, & poſtremus terminus, ſive earum productum pariter 1.

329. Hinc conſequitur binas illas radices imaginarias non eſſe habendas pro æqualibus illi reali 1, cum earum ſumma ſit ipſi æqualis, quæ quidem nec haberi debent pro æqualibus inter ſe, cum earum altera ſit ſumma quantitatum $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}\surd-3$, altera earundem differentia, ut ſupra etiam generaliter demonſtravimus num. 309, in æquatione tertii gradus carente ſecundo termino binas radices imaginarias non poſſe eſſe inter ſe æquales. Ambæ autem habendæ erunt pro negativis, cum earum productum poſitivum 1 oſtendat, utramque habere idem ſignum, & ſumma earum negativa -1 oriri non poſſit e binis quantitatibus poſitivis. Ac ea pariter omnia cum antea demonſtratis apprime congruunt.

330. Jam vero ut exhibeamus generalem ſolutionem in formula $x^3 + qx + r = 0$, ponatur $z + u = x$, & facta ſubſtitutione habebitur.

$$\begin{array}{llll} z^3 + 3uz^2 & + 3u^2z + u^3 & = x^3 \\ + qz & + qu & = qx \\ & + r & = r \end{array}$$

331. Ibi cum binæ novæ quantitates z, & u introdu-

troductæ ſint, ut ſumma omnis ſit $= 0$, licebit in binas partes ſummam dividere, & poſitis ſingulis $=$ o derivare binas æquationes, quæ illas novas incognitas determinent. Ponatur igitur $z^3 + r + u^3 = 0$, & $3uz^2 + 3u^2z + qz + qu = 0$. In hac ſecunda æquatione dividendo per $z + u$, habebitur $3uz + q = 0$, ac $u = -\frac{q}{3z}$ adeoque $u^3 = -\frac{q^3}{27z^3}$. Eo autem valore ſubſtituto in prima æquatione, fiet $z^3 + r - \frac{q^3}{27z^3} = 0$, ſive $z^6 + rz^3 - \frac{1}{27}q^3 = 0$; qua æquatione reſoluta ob z^6 & z^3 more æquationum gradus ſecundi methodo numeri 220, erit $z^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ adeoque $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$.

332. Invento valore z, invenire licet valorem u, vel ope æquationis $z^3 + r + u^3 = 0$, vel ope æquationis $3uz + q = 0$. Ex prima fit $u^3 = -r - z^3 = -r + \frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)} = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$, ac $u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ ita, ut ſi pro z aſſumatur valor poſitivus in radice incluſa, & $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{2}{27}q^3)}}$ pro u debeat idem aſſumi negativus, & $u =$

$\sqrt[3]{-}$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$, contra vero ſi pro a ſſumatur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$ obveniat $=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$. Quamobrem valor $x=z+u$ erit $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$ $+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$, vel $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$ quod eodem redit, cum ſolum binorum terminorum mutetur ordo, & ſumma ſit prorſus eadem, ipſis terminis iiſdem exiſtentibus utrobique.

333. Ope æquationis $3uz+q=0$ obveniſſet valor $u=\frac{-q}{3z}=\frac{-q}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}}$ qui magis implexus eſt, ſed eodem reducitur. Nam ſi multiplicentur invicem $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$ & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$; habetur $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}rr-\frac{1}{4}rr-\frac{1}{27}q^3)}=\sqrt[3]{(-\frac{1}{27}q^3)}=-\frac{1}{3}q$: ac proinde ſi $-\frac{1}{3}q$ dividatur per eorum valorum alterum, prodit alter, & $\frac{-q}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}}$ eſt

eſt idem, ac $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$.

334. Potuiſſet ope æquationum $z^3 + r + u^3 = 0$, & $3uz + q = 0$ erui prius valor u, & ex eo deduci valor z; & quoniam eas æquationes ii bini valores u, & z prorſus eodem modo ingrediuntur, idem valor prodiiſſet pro u, qui prodiit pro z, & viceverſa. Fuiſſet nimirum e ſecunda æquatione $z^3 = \frac{-q^3}{27u^3}$, ac inde in prima $\frac{-q^3}{27u^3} + r + u^3 = 0$, ſive $u^6 + ru^3 - \frac{1}{27}q^3 = 0$, $u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$, & eadem prorſus methodo $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$. Idcirco autem, uteſlibet valorum z, & u quæratur, provenit ſimul valor utriuſque, & ſi alter deinde cum ſigno poſitivo aſſumitur, alter negativum habebit, ac viceverſa, quod etiam ſupra notavimus num. 234. in caſu prorſus ſimili.

335. Jam vero formula $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}} + \sqrt[3]{-r - \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ in illa radice incluſa $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ imaginarietatem involvet, quotieſcunque valor q fuerit negativus, & $\frac{1}{27}q^3$ majus quam $\frac{1}{4}r^2$ nimirum quotieſunque tertius terminus æquationis fuerit negativus, & cubus ejus trientis major quadrato dimidii poſtremi termini: in cæteris autem caſibus omnibus formula ab imaginarietate libera erit (Nam $\frac{1}{4}rr$ cum ſit quadratum quan-

titas

[quan]titatis realis, erit ſemper valoris poſitivi, ac pro[inde] $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ non poteſt eſſe valoris negativi, n[iſi ſit v]aloris negativi q, & $\frac{1}{27}q^3$ ſuperet $\frac{1}{4}rr$.

336. Porro imaginarietas illa habebitur, quotieſcunque omnes tres æquationis radices reales erunt, & eadem excludetur, quotieſcunque una radix erit realis, & binæ imaginariæ. Nam num. 318 oſtendimus, quantitatem $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ fore negativam, quotieſcumque omnes æquationis radices reales erunt, poſitivam, quotieſcunque binæ fuerint imaginariæ.

337. Conſiderando autem eamdem formulam $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ ea, quæ quidem prima fronte videtur continere valorem unicum, poteſt habere valores 9 diverſos. Si enim $-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ dicatur c, $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ habebit (per n. 326) hoſce tres diverſos valores, c, ſive $c \times 1$, $c \times \frac{-1 + \gamma - 3}{2}$, $c \times \frac{-1 - \gamma - 3}{2}$, & pariter ſi $-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ dicatur e, ſecundus formulæ terminus habebit quemvis ex hiſce tribus valoribus, e, $e \times \frac{-1 + \gamma - 3}{2}$, $e \times \frac{-1 - \gamma - 3}{2}$

Quare ſi ſinguli e prioribus tribus valoribus conjungantur cum quovis e tribus poſterioribus, orientur 9 diverſæ combinationes. Sed tres tantum ex iis 9 valoribus formulæ ad præſentem quæſtionem pertinent, & exhibent ternas æquationis radices, nimi-

nimirum $c+e$, $c \times \frac{-1+\gamma-3}{2} + e \times \frac{-1-\gamma-3}{2}$, $c \times \frac{-1-\gamma-3}{2} + e \times \frac{-1+\gamma-3}{2}$. Nam ex vi æquationis $3uz+q=0$, ſive $uz=-\frac{1}{3}q$, binarum radicis partium u, & z productum debet eſſe $-\frac{1}{3}q$, adeoque ſemper idem. Aſſumptis igitur valoribus c & e habentibus formam realem, e cæteris ii ſolum una conjugi poſſunt, qui invicem multiplicati exhibeant ce. Porro cum ex tribus radicibus 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$; ſolum prima in ſe ducta, & ſecunda, ac tertia invicem multiplicatæ efficiant 1, ut patebit multiplicanti, eæ ſolum conjungi poſſunt ita, ut vel adhibeatur unitas cum utroque valore c & e, vel ponatur prima e binis imaginariis cum c, & ſecunda cum e, vel viceverſa ſecunda cum c, & prima cum e.

338. Porro binomii hujus formæ $m+\sqrt{n}$, quam nimirum formam habet $-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$, radix cubica extrahi quandoque poteſt habens formam eandem ita, ut radicalis termini ſignum in radice ſit idem, ac in cubo. Nam ſi fiat cubus quantitatis $a \pm \sqrt{b}$ habebitur (per n. 99) $a^3 \pm 3a^2\sqrt{b}+3ab \pm b\sqrt{b} = a^3 + 3ab \pm \sqrt{(3a^2+b)^2 b}$, ubi ſi a^3+3ab dicatur m, $(3a^2+b)^2 b$ dicatur n, habebitur $m \pm \sqrt{n}$, formæ ejuſdem cum $a \pm \sqrt{b}$. Sic binomii $1+\sqrt{2}$ cubus eſt $1+3\sqrt{2}+3\times2+2\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}=7+\sqrt{50}$, binomii $1-\sqrt{2}$ cubus $1-3\sqrt{2}+3\times2-2\sqrt{2}=7-5\sqrt{2}=7-\sqrt{50}$. Quare ſi radix

radix cubica valoris $-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$ dicatur $m+\sqrt{n}$, adeoque radix cubica valoris $-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}=m-\sqrt{n}$, tres illæ radices æquationis propoſitæ reducentur ad ſimpliciorem expreſſionem, erit enim $c=m+\sqrt{n}$, $e=m-\sqrt{n}$. Quare $c+e=2m$. Deinde $c\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=(m+\sqrt{n})\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m+m\sqrt{-3}-\sqrt{n}+\sqrt{-3n}}{2}$ & $e\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(m-\sqrt{n})\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m-m\sqrt{-3}+\sqrt{n}+\sqrt{-3n}}{2}$, quorum ſumma evadit $\frac{-2m+2\sqrt{-3n}}{2}=-m+\sqrt{-3n}$.

Demum eodem pacto $c\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(m+\sqrt{n})\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m-m\sqrt{-3}-\sqrt{n}-\sqrt{-3n}}{2}$ & $e\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=(m-\sqrt{n})\times\frac{-2+\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m+m\sqrt{-3}+\sqrt{n}-\sqrt{-3n}}{2}$, quorum ſumma $\frac{-2m-2\sqrt{-3n}}{2}=m-\sqrt{-3n}$.

339. Igitur tres radices æquationis propoſitæ erunt $2m$, $-m+\sqrt{-3n}$, $-m-\sqrt{-3n}$, ubi patet, primam radicem fore ſemper realem eliſa imaginarietate, quæ forte involveretur in illo $\sqrt{n}$, reliquas fore imaginarias, ubi n fuerit valoris poſitivi, reales, ubi negativi, & cum valor n debeat habere idem ſignum, ac illud $\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3$, unde ortum ducit, patet tres ra-

dices

dices ſore reales, vel unam realem, & binas imaginarias, prout in valore $\surd(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)$ involvetur imaginarietas, vel excludetur, quod ſupra alia methodo generaliter demonſtravimus.

340. Quod ſi $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ fuerit $= o$, in eo caſu etiam $\surd x$ erit $= o$, nam binomii $a + \surd o$ cubus eſt $a^3 + \surd o$ & binomii $a - \surd o$ pariter $a^3 - \surd o$. Quare in eo caſu tres radices ſunt $2m$, $-m$, $-m$, nimirum is caſus pertinet ad binas radices minores æquales ut ſupra demonſtravimus.

341. Porro ex iis omnibus, quæ demonſtrata ſunt conſequitur, imaginarietatem illam valoris $\surd(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)$ non indicare impoſſibilitatem radicis, cum in eo ipſo caſu, in quo ejuſmodi imaginarietas habetur, omnes tres radices reales ſint, & ipſa imaginarietas binorum terminorum elidatur, ac ſe mutuo deſtruat, ſed impoſſibilem eſſe ſuppoſitionem illam, quæ num. 331 ſit ad formulam inveniendam. Nimirum in illa æquatione $z^6 + rz^3 - \frac{1}{27}q^3 = o$ impoſſibilitas latet. Nam in caſu, in quo q eſt quantitas negativa, & $\frac{1}{27}q^3$ major, quam $\frac{1}{4}rr$, nulla quantitas eſt poſſibilis, cujus quadratum una cum ipſa ducta in r æquetur $\frac{1}{27}q^3$, quod ad illam equationem requiritur. Ac proinde licet x habeat valorem realem, fieri non poteſt ut dividatur in duas partes z, & u cum iis conditionibus, ex quibus oriatur æquatio $z^6 + rz^3 - \frac{1}{27}q^3 = o$.

342. Impoſſibilitas autem, ac imaginarietas in methodo, qua radicis formula invenitur, omnino involvi

debet,

[d]ebet, quotieſcunque omnes tres radices æquales ſunt; & id quidem continget omnino, quotieſcunque inveſti[ge]tur formula exprimens radicem cujuſcunque æquatio[n]is habentis exponentem imparem, & pluſquam unam [ra]dicem realem. Cum enim, ubi plures radices habet æquatio, quævis radix eodem prorſus pacto reſpiciat æquationem, & ejus conditiones impleat, nulla formu[l]a eruta ex ſolis iis, quæ æquatio ipſa ſuppeditat, po[t]erit exhibere potius unam, quam aliam. Nam ex ip[ſi]s Logicę elementis, immo ex rectæ rationis uſu con[ſt]at, ex antecedenti prorſus indifferenti ad plures concluſiones, non poſſe unam potius deduci, quam aliam. Quare ſi fieri poteſt, ut aliquam radicem formula ex[pri]mat, debet omnes ſimul exprimere.

343. Jam vero cum in quavis æquatione imagina[r]iarum radicum numerus par eſſe debeat, ut monuimus [n]um. 219, & in æquatione gradus imparis numerus [o]mnium radicum impar (per num. 237); omnino con[ſe]quitur in ęquatione gradus inparis realium radicum [n]umerum non poſſe non eſſe imparem.

344. At nulla formula algebraica realibus terminis [co]nſtans poteſt exprimere numerum radicum imparem [u]nitate majorem. Nam ſi nullos radicales terminos involvat, valorem unicum præbebit, ſi habebat radicales exponentis imparis, ipſi unicum valorem realem habe[re] poſſunt (per num. 26), licet habere poſſint plures imaginarios juxta n. 97. Quare ipſi etiam algebraicam formulam ad unicum valorem determinant, Radicales autem exponentis paris ſemper vel binos habebunt valores reales ſinguli, vel nullos, quod ex num. 40. facile deducitur. Quamobrem hujuſmodi radicales termini poſſunt exhibere parem numerum valorum realium formulæ, imparem omnino non poſſunt. Ac proinde ſi qua formula impoſſibilitate carens exhiberet radicem realem æquationis imparis habentis plures radices reales, id preſtaret, quod fieri non poteſt; adeoque, qui in æquatione tertii gradus habente omnes radices reales formulam imaginarietate carentem quærit, is profecto oleum, & operam perdit.

345. Ut tota reſolutionis ratio in numericis æquationibus evadat multo magis manifeſta, ſit æquatio $y^3 - 6y^2 + 3y + 20 = 0$. Poſito $x + 2 = y$ ad eliminandum ſecundum terminum, & facta ſubſtitutione erit $x^3 - 9x + 10 = 0$. Ea æquatione comparata cum generali $x^3 + qx + r = 0$, erit $q = -9$, $r = 10$, $-\frac{1}{2}r = -5$, $\frac{1}{3}q = -3$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 25 - 27 = -2$.

Quare $x = \sqrt[3]{(-5 + \sqrt{-2})} + \sqrt[3]{(-5 - \sqrt{-2})}$, ubi cum in $\sqrt{-2}$ involvatur imaginarietas, omnes tres æquationis radices reales ſunt. Porro binomii $-5 + \sqrt{-2}$ radix cubica eſt $1 + \sqrt{-2}$, cum hujus cubus ſit $1 + 3\sqrt{-2} + 3 \times -2 - 2 \times \sqrt{-2} = -5 + \sqrt{-2}$; adeoque binomii $-5 - \sqrt{-2}$ radix cubica $1 - \sqrt{-2}$. Erit igitur $m = 1$, $n = -2$, & proinde $2m = 2$, $-m + \sqrt{-3n} = -1 + \sqrt{6}$, $-m - \sqrt{-3n} = -1 - \sqrt{6}$.

346. Quare tres radices æquationis $x^3 - 9x + 10 = 0$ omnes reales ſunt $+2$, $-1 + \sqrt{6}$, $-1 - \sqrt{6}$. Et quidem ſi ea ipſa dividatur per $x - 2$, habebitur $x^2 + 2x - 5 = 0$, cujus radices ſunt $-1 \pm \sqrt{6}$. Cum vero ſit $x + 2 = y$, tres radices æquationis propoſitæ $y^3 - 6y^2 + 3y + 20 = 0$ erunt 4, $1 + \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$, quæ quidem ſi dividatur per $y - 4$, habetur $y^2 - 2y - 5 = 0$, cujus radices ſunt $y = 1 \pm \sqrt{6}$.

347. Quod ſi proponatur æquatio $x^3 + 3x - 14 = 0$, erit $q = 3$, $r = -14$, ac proinde $\frac{1}{3}q = 1$, $-\frac{1}{2}r = 7$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 49 + 1 = 50$. Quare $x =$

$\sqrt[3]{(7}$

$\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})}+\sqrt[3]{(7-\sqrt{50})}$, ubi cum $\sqrt{50}$ imaginarietatem non involvat, una erit radix realis, & binæ imaginariæ. Porro cum $7+\sqrt{50}$ ſit cubus binomii $1+\sqrt{2}$, & $7-\sqrt{50}$ binomii $1-\sqrt{2}$, ut vidimus, erit $m=1$, $n=2$, adeoque $2m=2$, $-m+\sqrt{-3n}=-1+\sqrt{-6}$, $-m-\sqrt{-3n}=-1-\sqrt{-6}$. Quare tres radices æquationis $x^3+3x-14=0$ erunt 2, $-1+\sqrt{-6}$, $-1-\sqrt{-6}$ prima realis, reliquæ binæ imaginariæ. Et quidem ſi ipſa æquatio dividatur per $x-2$, habetur $x^2+2x+7=0$, cujus radices ſunt $x=-1\pm\sqrt{-6}$.

348. Atque hoc ſolum pacto generalis haberi poſſet ſolutio æquationum gradus tertii, quæ nimirum radicales cubicos ſemper involvunt, & in iis ipſis valores imaginarios; ſi nimirum imaginarietas ipſa in realium radicum expreſſionibus elidatur imaginarietate alia; quod quidem contingeret, ſi liceret ſemper quantitatis $-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$ invenire radicem cubicam formæ $m\pm\sqrt{n}$. Verum id quidem raro admodum licebit. Et quidem quotieſcunque æquatio tertii gradus in propria ſede fuerit ita, ut per diviſionem deprimi non poſſit ad inferiorem gradum, licebit nunquam. Nam quotieſcunque illius formæ radix cubica invenietur, erit m quantitas rationalis, adeoque prima e radicibus $2m$ pariter rationalis, & diviſio inſtituta per $x-2m$ debebit ſuccedere. Sæpe autem illa radicis cubicæ extractio haberi non poterit, licet æquatio propoſita rationales radices habuerit, & deprimi poſſit. Quare ad alias methodos recurrendum in ejuſmodi caſibus.

349. Poteſt autem ſemper imaginarietas tolli, & radix cubica, quæ ad illam formam reducatur, extrahi per ſeries infinitas ope formulæ binomii ad potentiam indefinitam elevari, quam tradidimus num. 91, & ad radicum extractionem applicavimus num. 130. Formu-

la radicis cubicæ binomii $x+a$ erat num. 91 hujuſmodi $(x+a)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a x^{\frac{-2}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} a^2 x^{\frac{-5}{3}}$

$+ \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} a^3 x^{\frac{-8}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{6} \times$

$\frac{-8}{12} \times a^4 x^{\frac{-11}{3}}$ &c. binomia autem, ex quibus radix cubica extrahenda erat, ſunt $-\frac{1}{2} r + \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}$, $-\frac{1}{2} r - \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}$. Ponatur $-\frac{1}{2} r = f^3$, $\sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)} = g$, eritque $g^2 = \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3$ quantitas ſemper realis, ac patet, ipſius g potentias pares fore ſemper reales, licet in caſu trium radicum realium potentiæ impares imaginariæ ſint. Jam vero poſito f^3 pro x, & primo quidem g, tum $-g$ pro a, habebuntur ſequentes binæ ſeries.

$$(f^3 + g)^{\frac{1}{3}} = f + \frac{1}{3} g f^{-2} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} g^2 f^{-5}$$

$$+ \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} g^3 f^{-8} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} \times$$

$$\frac{-8}{12} g^4 f^{-11} \text{ \&c.}$$

$$(f^3 - g)^{\frac{1}{3}} = f - \frac{1}{3} g f^{-2} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} g^2 f^{-5}$$

—

$$-\frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}\times\frac{-5}{9}g^{3}f^{-8}+\frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}\times\frac{-5}{9}\times\frac{-8}{12}g^{4}f^{-11}\ \&c.$$

350. In hiſce ſeriebus primus terminus, tertius, quintus &c., qui continebunt potentias pares valoris g, carebunt & irrationalitate, & imaginarietate, eruntque utrobique cum iiſdem ſignis; at termini ſecundus, quartus, ſextus &c., qui continebunt potentias ejuſdem impares habebunt & irrationalitatem, & in caſu trium radicum realium imaginarietatem, ac erunt in altera cum uno ſigno in altera cum oppoſito. Continebit autem quivis ex iis terminis quantitatem rationalem, & realem ductam in prima ſerie in g, in ſecunda in $-g$, ſive in illa in $\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^{3})}$, in hac in $-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^{3})}$. Nam quævis potentia impar quantitatis g, eſt potentia ejus par, adeoque rationalis, & realis, ducta in ipſam; ut $g^{7}=g^{6}\times g$. Quare & ſumma horum terminorum continebit quantitatem realem, & rationalem ductam in eandem radicem g cum ſigno ibi poſitivo, hic negativo. Igitur prior ſumma poterit fieri $=m$; & poſterior $=\sqrt{n}$, ac $\sqrt{-3n}=\sqrt{-3}\times\sqrt{n}$, erit poſterior ſumma ducta in $\sqrt{-3}$. Erit igitur.

$$m=f+\frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}g^{2}f^{-5}+\frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}\times\frac{-5}{9}\times\frac{-8}{12}g^{4}f^{-11}\ \&c.$$

$$\sqrt{-3n}=\frac{1}{3}gf^{-2}\sqrt{-3}+\frac{1}{3}\times\frac{-2}{6}\times\frac{-5}{6}\times g^{3}f^{-8}$$

$f^{-8}\gamma^{-3}$ &c.

351. Porro in utraque ſerie patet terminum ſequentem ſemper ſuperaddere precedenti binos terminos ſeriei $\frac{1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-5}{9}, \frac{-8}{12}$ &, ac $g^2 f^{-6} = \frac{g^2}{f^6}$. Quare ſi primus terminus dicatur A, ſecundus B, tertius C, &c., ac $\frac{g^2}{f^6}$ dicatur Q; habebitur $m = f + \frac{1}{3}$

$\times \frac{-2}{6} AQ + \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} BQ + \frac{-11}{15} \times \frac{-14}{18}$ CQ. &c.

$\gamma - 3n = \frac{1}{3} g f^{-2} \gamma^{-3} + \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} AQ + \frac{-8}{12}$

$\times \frac{-11}{15} \times BQ + \frac{-14}{18} \times \frac{-17}{21}$ CQ &c.

352. Eſt autem $f = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r}$, $\frac{1}{3} g f^{-2} \sqrt{-}$

$= \frac{\gamma - 3g^2}{3f^2} = \frac{\sqrt{(\frac{-3}{4} rr + \frac{-3}{27} q^3)}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4} rr}}$, $\frac{g^2}{f^6} =$

$\frac{\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}{\frac{1}{4} rr} = 1 + \frac{4q^3}{27rr}$. Igitur datis r, & q, datur primus utriuſque ſeriei terminus, & per eum reliqui omnes, ac prima quidem ſeries carebit ſemper omni imaginarietate, ſecunda autem carebit, ſi $\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3$ fuerit quantitas negativa, quæ nimirum

ducta

ducta in -3 evadet poſitiva, at eam involvet, ſi ea fuerit quantitas poſitiva: nimirum carebit in caſu trium radicum realium, eam involvet in caſu binarum imaginariarum.

353. Quare habebuntur tres radices $2m$, $-m+y-3n$, $-m-y-3n$ per ſeries infinitas, quarum prima ſemper carebit imaginarietate, reliquæ duæ ea carebunt, vel eam involvent, prout illæ ipſæ radices reales erunt, vel imaginariæ.

354. Hæ ſeries erunt convergentes, & poterunt exhibere valores radicum veris proximos, quotieſcunque Q fuerit quantitas unitate minor: ſed ut uſui eſſe poſſint, & ſeries ſatis convergant, debebit eſſe multo minor. Cum vero ſit $Q = 1 + \frac{4q^3}{27rr}$, debebit eſſe q quantitas negativa; nam ſi poſitiva ſit, addetur unitati terminus poſitivus. Præterea $\frac{1}{27}q^3$ debebit eſſe, vel minor quam $\frac{1}{4}rr$, vel non duplo major; nam ſi fuerit duplo major, vel pluſquam duplo, fractio $\frac{4q^3}{27rr}$ erit æqualis vel major binario; adeoque, ablata poſitiva unitate, erit Q æqualis unitati, vel major ipſa. Quo autem magis ad æqualitatem accedent $\frac{1}{27}q^3$, & $\frac{1}{4}rr$, eo citius converget ſeries, quia ejus fractionis valor eo magis ad unitatem accedet, & vel ipſa ablata ab unitate, vel unitate ab ipſa, relinquetur pro Q quantitas poſitiva, vel negativa tanto minor.

355. Quod ſi ea fractio $\frac{4q^3}{27rr}$ fuerit æqualis unitati,

& valor q negativus; erit $1 + \frac{4q^3}{27rr}$, ſive $Q = 0$. Eo caſu erit $\frac{1}{4}rr = -\frac{1}{27}q^3$, adeoque $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 0$; nimirum valor $g = 0$; Quare omnes termini ſecundæ ſeriei, & omnes termini primæ, præter unicum f erunt $= 0$. Erit igitur $m = f = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r}$, & $\sqrt{(-3n)} = 0$. Quare tres radices erunt $2f$, $-f$, $-f$; nimirum binæ radices minores erunt inter ſe æquales; quod per num. 312 debet contingere; ubi $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 0$.

356. Sit æquatio $x^3 - 9x + 10 = 0$, eadem quæ num. 345. Erit Q unitate minor, & ſeries ſatis converget: erat enim $\frac{1}{27}q^3 = -27$; $\frac{1}{4}r^2 = 25$. Quare

$$\frac{4q^3}{27rr} = \frac{-27}{25}, \text{ \& } Q = 1 - \frac{27}{25} = \frac{-2}{25} = -0.08.$$

Primus autem primæ ſeriei terminus erit $f = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r} = \sqrt[3]{-5} = -1.709975947$, primus ſecundæ $\frac{1}{3}gf^{-2}\sqrt{-3}$, ob $g = \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3\right)} = \sqrt{-2}$, & $f^2 = \sqrt[3]{25}$, erit $= \frac{\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}}{3\sqrt[3]{25}}$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{25}} = \frac{2.44948974278}{3\times 2.92401773931} = 0 - 27923790268.$$

Ex his autem termini reliqui, & ipſarum ſerierum valores inveniuntur, quos hic apponimus uſque ad nonam decimalium notam.

Pro

Pro prima ſerie m:

$$A = f = -1.709975947$$

$$B = \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} AQ = -0.015199786$$

$$C = \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} BQ = +0.000450364$$

$$D = \frac{-11}{15} \times \frac{-14}{18} CQ = -0.000020550$$

$$E = \frac{-17}{21} \times \frac{-20}{24} DQ = +0.000001109$$

$$F = \frac{-23}{27} \times \frac{-26}{30} EQ = -0.000000065$$

$$G = \frac{-29}{33} \times \frac{-32}{36} FQ = +0.000000004$$

Summa negativorum	$= -1.725196349$
Summa poſitivorum	$= +0.000451478$
Valor ſeriei m	$= -1.724744871$

Pro

Pro ſecunda ſerie $\sqrt{-3}\,n$.

$$A = \frac{1}{3}\, 8f^{-2} \sqrt{-3} = +\ 0.279237903$$

$$B = \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} AQ = -\ 0.004136858$$

$$C = \frac{-8}{12} \times \frac{-11}{15} BQ = +\ 0.000161797$$

$$D = \frac{-14}{18} \times \frac{-17}{21} CQ = -\ 0.000008159$$

$$E = \frac{-20}{24} \times \frac{-23}{27} DQ = +\ 0.000000463$$

$$F = \frac{-26}{30} \times \frac{-29}{33} EQ = -\ 0.000000028$$

$$G = \frac{-32}{36} \times \frac{-35}{39} FQ = +\ 0.000000002$$

Summa poſitivorum $= +\ 0.279400165$

Summa negativorum $= -\ 0.004145036$

Valor ſeriei $\sqrt{-3n} = +\ 0.275255129$

357. Inde autem valores eruuntur trium ęquationis radicum, $2m = -\ 3.449489742$, $-m + \sqrt{-3n} = +\ 1.724744871 + 0.275255129 = +\ 2.000000000$, $-m - \sqrt{-3n} = +\ 1.724744871 - 0.275255129 = +\ 1.449489742$. Porro inveneramus num. 346 tres radices 2, $-1 + \sqrt{6}$, $-$, $1 - \sqrt{6}$, ſive cum ſit $\sqrt{6} = 2.449489743$, tres radices erant 2, 1.449489743, -3.449489743, quę cum hìc inventis ita conveniunt, ut ſo-

ſolum habeatur diſcrimen unius unitatis in poſtrema decimalium ſede radicum irrationalium ortum ex contemptu decimalium inferiorum in multiplicationibus diviſionibus, ac ſummis tot terminorum.

358. Notandum autem, radicem illam 2, quę prius obvenerat ſub forma $2m$ primo loco, hic obveniſſe ſub forma $-m+\sqrt{-3n}$ ſecundo loco, ob diverſam nimirum rationem extrahendi radicem cubicam ex illo binomio.

359. Notandum preterea, quod ſupra etiam innuimus, & hic exemplo hoc oſtendiſſe, & monuiſſe ſit ſatis, illam cyphrarum multitudinem poſt 2 ſatis indicare, haberi hic radicem accuratam rationalem 2, quo numero ſubſtituto pro x, cum æquatio verificetur, patet deinde, revera eam ipſam eſſe accuratam ęquationis radicem. Idem indicium haberetur, ſi poſt tot cyphras obveniſſet 1, vel ſi ſeries exhibuiſſet valorem 1.9999 &c. Poſſet enim diſcrimen unitatis in poſtrema nota provenire ex ulterioribus decimalibus contemptis, immo & plurium unitatum defectus poſt plures notas 9, vel exceſſus poſt plures cyphras 0, indicium nequaquam turbaret ob eandem cauſam. Et hoc ſane pacto omne ſerierum genus verum valorem approximantium, indicat ipſum valorem verum ubi accuratus habetur, ut monuimus num. 142.

360. Si aſſumeremus exemplum æquationis $x^3 + 3x - 14 = 6$, in qua $q = 3$, quantitas poſitiva, haberemus $\frac{1}{27} q^3 = +1$, cumque ſit $\frac{1}{2} r = -7$, eſſet $\frac{1}{4} rr = 49$, & $Q = 1 + \frac{4q^3}{27rr} = 1 + \frac{1}{49}$, qui valor cum ſit unitate major, ſeries divergit. Si eſſet $x^3 - 3x - 14 = 0$, eſſet $\frac{1}{27} q^3 = -1$, adeoque $Q = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$. Eo caſu ſeries convergeret, ſed ita lentè, ut immenſus terminorum numerus

merus requiratur ad valorem aliquantiſper approximandum. Quamobrem hæc methodus paucos admodum caſus complectitur, cum excludat omnino eos omnes, in quibus tertius terminus eſt poſitivus: tum ex iis, qui negativum habent, excludat eos omnes, in quibus $\frac{1}{27}q^3$ duplo, vel pluſquam duplo excedit valorem $\frac{1}{4}rr$. Inter eos autem caſus, qui relinquuntur, & ſeriem convergentem exhibent, nulli uſui eſſe poteſt, niſi $\frac{1}{27}q^3$ ad $\frac{1}{4}rr$ ita accedat, ut fractio $\frac{4q^3}{27rr}$ ab unitate parum admodum diſcrepet; ut nimirum ejus differentia ab unitate, quæ exhibet valorem Q, ſaltem ad decimam unitatis partem deprimatur.

361. Et quidem in caſu unicæ radicis realis, in quo $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ imaginarietatem non involvit, poteſt illa unica radix inveniri per formulam $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ ſubſtitutis numeris & extracta una radice quadrata, ac binis cubicis. Ita in æquatione illa ipſa $x^3 + 3x - 14 = 0$, cujus radicem realem num. 347 invenimus $= 2$, liceret eandem invenire ſubſtitutis in ea formula numeris nimirum 7 pro $-\frac{1}{2}r$, 49 pro $\frac{1}{4}rr$, 1 pro $\frac{1}{27}q^3$. Haberetur enim $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$ $= \sqrt[3]{7 + 7.07106781 2} + \sqrt[3]{7 - 7.071067812} = \sqrt[3]{14.071067812} + \sqrt[3]{-0.071067812} =$

2.

1. 414213563 — 0. 414213563 = 2.

362. Cum vero caſus trium radicum realium r vi poſſit hac formula imaginarietatem involvente ſaltem generaliter illa radicis extractione vel per fit. binomium, vel per infinitam ſeriem, quæ imaginitatem elidat; idcirco appellari ſolet caſus irreducibilis. At non deſunt methodi, quibus ipſe etiam irreducibilis caſus reducatur, & inveniantur æquationis radices. Proferemus unam, quæ quidem ſemper immediate maximam exhibet, ac ope ipſius maximæ reliquas duas, & valoris limites ſtatim præbet, ac ſatis convergit, eoque magis, quo q reſpectu r eſt major.

363. In formula generali $x^3 + qx + r = 0$, fiat tranſponendo $x^3 = -qx - r$, tum dividendo per x, erit $x^2 = -q - \frac{r}{x}$, adeoque $x = \sqrt{(-q - \frac{r}{x})}$. Aſſumatur jam pro x quivis numerus, cum ſigno contrario ſigno ipſius r, & fractio $\frac{r}{x}$ erit negativa, adeoque $-\frac{r}{x}$ poſitiva; cumque etiam $-q$ in caſu irreducibili ſit (per num. 314) quantitas poſitiva; erit $-q-\frac{r}{x}$ valoris poſitivi. Extracta radice ex $-q-\frac{r}{x}$ habebitur novus valor x, qui erit major vero, ſi aſſumptus ille fuerit minor, & viceverſa. Si enim pro x aſsumatur valor minor vero, obveniet fractio $-\frac{r}{x}$ major vero, adeoque ſumma $-q-\frac{r}{x}$ major vero, & ejus radix vero minor, & eadem eſſet demonſtratio oppoſiti. Porro novus hic valor obveniet adhuc vero propior, errore in extractione radicis decreſcente, & hoc novo valore adhibito, invenietur valor tertius adhuc propior, & ita porro.

364.

364. In æquatione $x^3 - 9x + 10 = 0$; qua toties uſi ſumus, & quæ habet tres radices reales, erit $x = \sqrt{(9 - \frac{10}{x})}$.

Ponatur 1.° $x = -1$, erit $\frac{-10}{x} = 10$; $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{9 + 10} = \sqrt{19} = -4.4$

Ponatur 2.° $x = -4.4$; erit $\frac{-10}{x} = 2.27$; $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{11.27} = -3.35$

Ponatur 3.° $x = -3.35$; erit $\frac{-10}{x} = 2.985$ $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{(11.985)} = -3.462$

Ponatur 4.° $x = -3.462$, erit $\frac{-10}{x} = 2.8885$. $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{(11.8885)} = -3.4479$

Ponatur 5.° $x = -3.4479$; erit $\frac{-10}{x} = 2.9003$; $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{(11.9003)} = -3.44968$

365. Hoc pacto liceret progredi; & cum radicem maximam hujus æquationis inveneriinus num. 266 -3.44949; jam poſt quintam operationem ab ea recedimus tantum per $\frac{19}{100000}$. Porro in prima operatione habemus limites -1, & -4.4, in ſecunda multo arctiores 4.4, & -3.35, in tertia adhuc multo arctiores -3.35, & -3.462, in quarta adhuc etiam arctiores -3.462; & -3.4479, in quinta pariter arctiores -3.4479, -3.44968. In ſingulis autem operationibus augendus eſt notarum decimalium numerus, ut binæ vel ternæ habeantur notæ, ultra eas, in quibus jam præcedentes limites conſen-

[ſ]entiunt; nam plures initio aſſumere, cum valor aſſumptus adhuc a vera radice nimis diſtat, res eſſet laboris irriti.

366. Radix hoc pacto inventa erit ſemper radix maxima (per num. 314); erit enim ea, quæ habebit ſignum contrarium ſigno poſtremi termini. Poterit autem eadem methodus adhiberi, etiam in caſu reducibili quotieſcumque q eſt valoris negativi; & poterit quandoque ſi ſit valoris poſitivi, dummodo $\frac{r}{x}$ ipſum ſuperet, & $\sqrt{(-q-\frac{r}{x})}$ non evadat valor negativus. Poſſent pariter & minores radices æquationis irreducibilis hoc pacto aliquando inveniri aſſumendo pro x ſignum conforme ipſi r, dummodo valor $-\frac{r}{x}$, qui tum erit negativus, non ſuperet poſitivum $-q$. Sed in caſu æquationis reducibilis, radix illa unica realis facilius invenitur per formulam $\sqrt[3]{}(-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)})$, & binæ radices minores æquationis irreducibilis facilius, inventa maxima, invenientur ſequenti methodo, quę, inventa qualis e tribus radicibus, ſemper exhibebit tertiam admodum facile.

367. Sit nimirum radix inventa $=a$, & reliquarum ſumma (per num. 307) debebit eſſe $-a$, cum omnium ſumma ſit $=0$; cumque omnium productum per (num. 242) ſit $-r$, erit reliquarum productum $\frac{-r}{a}$. Quare æquatio ſecundi gradus illas continens erit $x^2+ax-\frac{r}{a}=0$; adeoque $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}aa+\frac{r}{a})}$.

368. In æquatione $x^3-9x+10=0$, invenimus radicem maximam $a=-3.44968$, hinc erit

$-\frac{1}{2}a = 1.72484$, erat autem $n = 10$; ac proinde $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{r}{a})} = \sqrt{}$ (2. 97507 &c. — 2. 89882) $= \sqrt{}$ (0. 07625). 0. 2761. Quare reliquæ binæ radices 1 7248 ± 0. 2753, erunt 2, 0009, & 1, 4487, quæ e veris 2, , & 1, 449489 &c., ſive 1. 4495 inventis num. 357, in quarta aut tertia decimalium nota differunt, quia nempe in quarta differebat a vera radix illa a ad eas inveniendas aſſumpta. Nam ſi æquatio habuiſſet radices accuratas, & accurata radix aſſumeretur pro a, reliquæ etiam binæ neceſſario accuratæ obvenirent.

369. Si vero liberet e poſtrema methodo, quæ radice maximam invenimus, derivare ſeriem infinitam alterius formæ, exprimentem valorem radicis x, ſatis eſſe perpetuo pro x ſubſtituere valorem $\sqrt{(-q-\frac{r}{x})}$. Haberetur enim $x = \sqrt{(-q-\frac{r}{x})} =$

$$\sqrt{-q-\cfrac{r}{\sqrt{-q-\frac{r}{x}}}} = \sqrt{-q-\cfrac{r}{\sqrt{-q-\cfrac{r}{\sqrt{-q-\cfrac{r}{\sqrt{-q-r}}}}}}} \ \&c.$$

370. Poſſet & alia ſeries derivari, in qua per extractionem radicis cubicæ ſine periculo imaginarietatis deveniretur ad valorem vero proximum, ponendo nimirum $x^3 = -r-qx$, adeoque $x = \sqrt[3]{(-r-qx)} = \sqrt[3]{-r-q\sqrt[3]{-r-q\sqrt[3]{-r-q}}}$ &c. Sed extractio illa radicis cubicæ eſt nimis operoſa. Habentur autem aliæ methodi multo magis convergentes inveniendi in quovis æquationum genere radices veris proximas, ubi eæ ſemel innoteſcant a veris diſcre-

repantes minus quam decima ſui parte, de quibus ſtra. Quare ſatius eſt methodo, quam poſtremo loco adhibuimus invenire radicis maximæ limites ſatis arctos; iterata bis vel ter operatione, quod ob paucitatem notarum ſit admodum facile, tum iis methodis ad verum valorem propius accedere. Praeterea æquationis tertii gradus irreducibilis radices admodum facile inveniuntur ope tabulæ ſinuum trigonometricæ, cum pertineat is caſus ad anguli triſectionem, de quo in applicatione algebræ ad Geometriam.

371. Hinc expoſitis iis, quæ pertinent ad æquationem gradus tertii, facile patet earum ope haberi etiam reſolutionem æquationum altiorum, in quibus adſint ſoli quatuor termini, ac poſtremus incognita careat, primus habeat ejus potentiam triplam tertii, ſecundus duplam ejusdem; quæ proinde habeat hanc formam x^{3m} $+ p x^{2m} + qx^{m} + r = 0$. Poſito enim $x^{m} = y$, habebitur $y^3 + py^2 + qy + r = 0$, ubi inventis valoribus y, erit $x = \sqrt[m]{y}$.

372. Hujuſmodi æquationis noni gradus redactæ ad tertium ut aliquis habeatur uſus, ea utemur ad inveſtigandam radicem cubicam binomii illius formæ $m + \sqrt{n}$, qua prius uſi ſumus. Inveſtigatio autem erit ſimilis illi, quam num. 232 adhibuimus ad inveniendam ſimilis binomii radicem quadratam, ubi obvenit æquatio gradus quarti, deprimenda ad ſecundum.

373. Aſſumatur formula cubi binomii $x + z$, nimirum (per num. 99) $x^3 + 3x^2 z + 3z^2 x + z^3$, quæ ponatur $= m + \sqrt{n}$. Si autem in binomio quæſito fuerit x pars rationalis, & z irrationalis, primus, & tertius cubi terminus carebunt irrationalitate, quam ſecundus, & quartus involvent. Ponatur

igitur $x^3 + 3z^2x = m$; & $3x^2z + z^3 = \sqrt{n}$.

374. Ut ope harum æquationum eliminetur z, capiatur in ſecunda valor $z^3 = -3x^2z + \sqrt{n}$, in prima vero $z^2 = \frac{m - x^3}{3x}$ quo ducto in z erit iterum $z^3 = \frac{mz - x^3z}{3x}$. Quare ęquatis hiſce binis valoribus; erit $-3x^2z + \sqrt{n} = \frac{mz - x^3z}{3x}$, ſive $-9x^3z + 3x\sqrt{n} = mz - x^3z$, vel $3x\sqrt{n} = mz + 8x^3z$; ac proinde $\frac{3x\sqrt{n}}{m + 8x^3} = z$. Quoniam habebatur $z^2 = \frac{m - x^3}{3x}$; & hic quadrando habetur $\frac{9nx^2}{(m + 8x^3)^2} = z^2$; æquatis hiſce valoribus jam habebitur $\frac{m - x^3}{3x} = \frac{9nx^2}{(m + 8x^3)^2}$; ſive $(m - x^3)(m + 8x^3)^2 = 27nx^3$; quę æquatio facta multiplicatione, & ordinatis terminis, evadit $64x^9 - 48mx^6 \begin{matrix} -15m^2 \\ +27n \end{matrix} x^3 - m^3 = 0$.

375. Porro ea reducitur ad tertium gradum; & liberatur ſimul a coefficiente primi termini, ſi ponatur $x^3 = \frac{1}{8}y$; erit enim $\frac{1}{8}y^3 - \frac{3}{4}my^2 + \frac{27n - 15m^2}{8}y - m^3 = 0$, & multiplicando per 8 fiet $y^3 - 6my^2 + (27n - 15m^2)y - 8m^3 = 0$. Qua ęquatione reſoluta habebitur y; & proinde x

de $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$ cumque inventum fuerit $z^2 = \frac{m - x^3}{3x}$, invenietur $z = \sqrt{\frac{(m - x^3)}{3x}}$.

376. Sed admodum facile hujus æquationis ope obtinebitur intentum, ſi conſideretur, valorem x debere eſſe rationalem; ac proinde & $y = 8x^3$ rationalis eſſe debebit. Quamobrem ſatis erit quærere, an ea æquatio habeat radicem rationalem; & quidem ejuſmodi inveſtigatio facilior evadet, cum, ut x ſit valor rationalis, debeat y habere præterea radicem cubicam rationalem, adeoque inter diviſores poſtremi termini $8m^3$ quærendi erunt ſoli, qui habere poſſint radicem cubicam. Radix igitur cubica diviſorum tentandorum debet inveniri inter diviſores radicis cubicæ poſtremi termini $8m^3$, nimirum debet eſſe diviſor quantitatis $2m$. Quin immo quoniam ſi binomium fractione careat etiam x carere debet fractione, adeoque x^3, ſive $\frac{1}{8}y$, fractione carere debet; diviſor, qui quæſtioni poſſit ſatisfacere, debet poſſe dividi per 8, adeoque ejus radix cubica per 2. Quare ſoli diviſores valoris m conſiderandi ſunt, & radix illa rationalis æquationis inventæ quærenda inter cubos diviſorum m ductos in 8, quorum ſi nullus ſatisfaciat, illa radix cubica ex propoſito binomio extrahi non poterit

377. Atque eo pacto diviſorum poſtremi termini numerus in immenſum minuitur, qui adhuc etiam dimidiari poteſt ſi $\sqrt{n}$ fuerit valor realis. Eo enim caſu erit realis etiam valor z, qui inde naſcitur. Quare z^2 erit valor poſitivus, ac proinde in æquatione $x^3 + 3z^2 x = m$ primum membrum erit poſitivum, vel negativum, prout x fuerit poſitivum, vel negativum. Debet autem id membrum habere idem ſignum, ac ſecundum

m. Igitur erit x ejuſdem ſigni cum m, & ii diviſores adhibendi ſunt tantum cum ſigno conformi ipſi m.

378. Sit binomium, quo num. 338 uſi ſumus, $7 + \sqrt{50}$. Erit $m = 7$, $n = 50$, quibus valoribus ſubſtitutis æquatio numeri 375 evadit $y^3 - 42y^2 + 615y - 2744 = 0$. Porro m habet ſolos diviſores 1, & 7, quorum cubi 1, & 343 ducti in 8 exhibent 8, & 2744, qui ſoli cum ſigno poſitivo conformi ipſi m, adhibendi ſunt inter tam multos poſtremi termini diviſores. Et quidem ſubſtituto 8 æquationi ſatisfit, quæ dividitur per $y - 8$. Erit igitur $y = 8$, $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} = 1$, $z = \sqrt{(\frac{m - x^3}{3x})} = \sqrt{(\frac{7-1}{3})} = \sqrt{2}$. Radix igitur quæſita $1 + \sqrt{2}$, ut ibidem inveneramus.

379. Si autem ſit alterum binomium ibidem adhibitum $-5 + \sqrt{-2}$, erit $m = -5$, $n = -2$. Quare eadem æquatio evadit $y^3 + 30y^2 - 429y + 1000 = 0$. Porro m habet ſolos diviſores 1, & 5, quorum cubi 1, & 125 multiplicati per 8 exhibent 8, & 1000. Quare hi tantum inter tot diviſores numeri 1000 adhibendi ſunt, ſed cum utroque ſigno ob valorem n negativum. Satisfacit autem æquationi hic pariter 8, & ea dividi poteſt per $y - 8$. Igitur hic etiam eſt $y = 8$, $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{2}{2} = 1$. At $z = \sqrt{(\frac{m - x^3}{3x})} = \sqrt{(\frac{-5-1}{3})} = \sqrt{-2}$. Radix igitur quæſita erit $1 + \sqrt{-2}$, ut pariter ibidem inveneramus.

380. At ſi proponatur $2 + \sqrt{3}$, erit $m = 2$, $n = 3$. Quare æquatio erit $y^3 - 12y^2 - 21y - 64 = 0$. Porro m habet tantum diviſores 1, & 2, quorum cubi 1,

& 8

& 8 ducti in 7, exhibent 8, & 64 adhibendos cum ſigno poſitivo conformi valori m. Neuter autem ex hiſce diviſoribus ſatisfacit. Quare binomium illud $2 + \sqrt{3}$ radicem cubicam extrahibilem non habet.

381. Ceterum quod valor x debeat eſſe inter diviſores valoris m, patet etiam ex eo, quod poſitum fuerit num. 373 $x^3 + 3xz^2 = m$, adeoque eſt $m = x \times (x^2 + 3z^2)$, & proinde debet poſſe dividi per x.

382. Atque hoc quidem pacto ea omnia, quę initio hujus §. propoſueramus abunde prę̨ſtitimus. Jam æquationes quarti gradus aggrediemur, quæ pendent ab æquationibus tertii, in quibus tamen minus immorabimur.

§. XIII.

De reſolutione æquationum gradus quarti.

383. ÆQuationes quarti gradus poſſe componi ex quatuor æquationibus primi, vel ex binis ſecundi, vel ex una tertii, & una primi, patet ex num. 245. Quare poterunt habere omnes radices reales, vel binas reales, & binas imaginarias, quas nimirum habeat illa æquatio tertii, vel altera ex iis ſecundi, vel etiam omnes imaginarias, quas nimirum habeant ambæ æquationes ſecundi. Hinc etiam, eas poſſe aliquando deprimi per diviſionem, ut cæteras omnes, patet ex num. 193. Eaſdem, ſi careant poſtremo termino, habere unam radicem $= 0$, & deprimi diviſione per x, patet ex num. 247. Si careant terminis omnibus intermediis, & reducantur ad formulam $x^4 + t = 0$ reſolvi more æquationum primi gradus, patet ex n. 204 ubi oſtendimus fore $x^4 = -t$, $x = \sqrt[4]{-t}$, ſive (per num. 40) $+\sqrt{\pm\sqrt{-t}}$, ubi habebuntur quatuor valores bini ſemper imaginarii, & bini alii reales vel imaginarii, prout valor t fuerit negativus, vel poſiti-

ſitivus, & proinde $-t$ poſitivus, vel negativus. Si careat & ſecundo, & quarto termino ſimul, ac reducatur ad formam $x^4 + qx^2 + t = 0$, reſolvi more æquationum ſecundi gradus, patet ex num. 220. Demum poſſe ſemper liberari a ſecundo termino, aſſumendo $y - \frac{1}{4}p = x$ patet ex num. 287. Reliquum igitur eſt, ut agamus de reſolutione æquationis ad hanc formam redactæ $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$.

384. Porro ut eam reſolvamus, licebit concipere, eandem componi ex binis æquationibus ſecundi gradus, quarum tamen altera habere debet coefficientem ſecundi termini æqualem coefficienti alterius; cum enim deſit ſecundus terminus æquationis propoſitæ, ſumma ejus radicum eſt $= 0$ (per num. 244). Coefficientes autem ſecundorum terminorum in æquationibus aſſumendis continebunt (per num. 242) ſummas binarum. Quare cum altera ex iis ſummis debeat alteram elidere, alter ex iis coefficientibus debebit æquari alteri accepto cum ſigno contrario.

385. Sint igitur binæ æquationes aſſumendæ $x^2 + ux + m = 0$, $x^2 - ux + n = 0$, in quibus oportet determinare valores u, m, n.

386. Multiplicatis iis inter ſe oritur æquatio

$$x^4 - u^2 x^2 = mux + mn = 0$$
$$+ mx^2 + nux$$
$$+ nx^2$$

quæ comparata cum illa generali $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$ exhibebit ſequentes tres æquationes $-u^2 + m + n = q$, $-mu + nu = r$, $mn = t$, quarum ope eliminatis m, & n invenietur æquatio pro u.

387. In tertia enim erit $n = \frac{t}{m}$, quo valore ſubſtituto, prima mutatur in hanc quartam $-u^2$
$+ m$

$+ m + \frac{t}{m} = q$, ſive in hanc quintam $- u^2 m + m^3 + t = qm$: ſecunda vero in hanc ſextam $- mu + \frac{tu}{m} = r$, vel in hac ſeptimam $- m^2 u + tu = rm$. Ex hac eruitur $tu - rm = m^2 u$, ſive $\frac{tu - rm}{u} = m^2$, quo valore ſubſtituto in quinta, habetur $- u^2 m + \frac{tu - rm}{u} + t = qm$, ubi multiplicando per u, ac tranſponendo, ut erui poſſit valor m, fiet $2 tu = u^3 m + qum + rm$, ac ex ea hæc octava $m = \frac{2 tu}{u^3 + qu + r}$. Hoc demum valore m ſubſtituto in quarta, habetur æquatio nona continens ſolam incognitam u: $- u^2 + \frac{2 tu}{u^3 + qu + r} + \frac{u^3 + qu + r}{2u} = q$. Ex ea vero, multiplicando per $2u\,(u^3 + qu + r)$ tranſponendo terminos primi membri, ac inter ordinandum elidendo eos, qui ſe mutuo deſtruunt, obtinebitur æquatio ſexti gradus, $u^6 + 2 qu^4 + q^2 u^2 - 4tu^2 - r^2 = 0$, quæ facto $u^2 = y$, reducitur ad hanc tertii $y^3 + 2qy^2 + q^2 y - 4ty - r^2 = 0$.

388. In hac æquatione invenientur methodo §. præcedentis tres valores y, quorum ſaltem unus erit realis (per num. 298, 219). Cumque ſit $u = \pm \sqrt{y}$ invenientur ſex valores u, quorum ſaltem bini reales erunt; tum ope ipſius u, & octavæ æquationis $m =$

$\frac{t}{2\,tu}$

$u^3 + qu + r$ invenientur totidem valores m, ac demum ope hujus; & æquationis $n = \frac{t}{m}$ erutæ ex tertia invenientur totidem valores n, qui tamen nec erunt neceſſarii: Nam ſex illi valores u, & m exhibebunt ſex æquationes $x^2 + ux + m = 0$, quæ continebunt omnes æquationes ſecundi gradus, quæ poſſunt fieri aſſumendo binas ex 4 radicibus æquationis propoſitę quarti gradus, quę nimirum ſunt ſex, cum (per num. 92) ſex binaria haberi poſſint in quatuor quantitatibus; ac proinde aſſumptis omnibus valoribus u, & m, eędem illæ 6 æquationes oriėntur ex æquatione $x^2 + ux + m = 0$, quę orirentur aſſumptis omnibus valoribus u, & n ex ęquatione $x^2 - ux + n = 0$. Quin immo, bini tantum valores u prodeuntes ex unico valore y exhibebunt binas ęquationes continentes illas omnes quatuor radices, ad quas inveniendas reſolvendę erunt binę æquationes ſecundi gradus prodeuntes ex ſubſtitutione binorum valorum u, & m reſpondentium eidem valori y in ęquatione $x^2 + ux + m = 0$.

389. Porro cum ęquatio tertii gradus neceſſario exhibeat ſaltem unum valorem y realem; patet ſemper binas æquationes ſecundi gradus inveniri debere, nec methodum ad eas inveniendas adhibitam quidquam impoſſibile aſſumere, ut methodus, qua tertii gradus ęquatio reſolvebatur, aſſumpſit juxta num. 341, & ſi forte radices imaginarias habuerit æquatio quarti gradus, eę continebuntur in illis æquationibus ſecundi gradus, nec poterunt eſſe niſi vel binæ, vel omnes quatuor.

390. Quod ſi ęquatio quarti gradus poterit deprimi ad ſedem inferiorem per diviſionem in duas ſecundi gradus irrationalitate carentes, debebunt haberi ſaltem bini valores u rationales, adeoque ſaltem unus valor y ita rationalis, ut & radicem habeat. Quare cum æquationis

tionis tertii gradus inventę poſtremus terminus ſit r^2, oportebit (per num. 242) ejuſmodi valorem y eſſe inter diviſores ipſius r^2, habentes radicem, & proinde valorem u inter diviſores ipſius r, quorum ſi nullus ad ſecundam potentiam elevatus exhibeat radicem rationalem ęquationis tertii gradus, ęquatio illa gradus quarti dividi non poterit in duas ſecundi irrationalitate carentes. An autem deprimi poſſit per ęquationem primi ope diviſores hujus formę $x + a$, id patebit methodo numeri 75. Quare jam habemus methodum agnoſcendi ſemper an ęquatio quarti gradus in propria ſede ſit, an poſſit deprimi.

391. Sit æquatio $z^4 \; 8z^3 + 9z^2 + 38z - 40 = 0$. Poſito $x + 2 = z$ juxta num. 287, & facta ſubſtitutione, erit $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$ æquatio carens ſecundo termino. In ea $q = -15$, $p = 10$, $r = 24$. Quare æquatio illa gradus tertii $y^3 + 2qy^2 + q^2 y - p^2 = 0$ reducitur ad hanc
$$\begin{array}{l} + q^2 y \\ - 4ry \end{array}$$
$y^3 - 30y^2 + 129y - 100 = 0$. Si hæc habeat radices rationales, quæ uſui eſſe poſſint, quærendę ſunt inter diviſores quadratos numeri $100 = r^2$ nimirum inter quadrata diviſorum numeri $10 = r$ nulla habita ſignorum ratione, cum quadrata debeant eſſe ſemper poſitiva. Porro numerus 10 habet diviſores 1, 2, 5, 10, quorum quadrata 1, 4, 25, 100. Ex his ſatisfaciunt æquationi priores tres 1, 4, 25, Habet igitur y tres valores 1, 4, 25, adeoque u ſex: 1, -1, 2, -2, 5, -5.

392. Et quidem invento primo valore $y = 1$ æquationis tertii gradus, reliqui inveniuntur etiam diviſa autem per $y - 1$, unde provenit $y^2 - 29y + 100 = 0$, & $y = \frac{29}{2} \pm \sqrt{(\frac{841}{4} - 100)} = \frac{29}{2} \pm$

N

$\sqrt{\frac{(841-400)}{4}} = \frac{29}{2} \pm \frac{\sqrt{411}}{4} = \frac{29}{2} \pm \frac{21}{2}$; inde vero eruuntur bini valores $y = \frac{50}{2} = 25$, & $y = \frac{8}{2} = 4$.

393. Habitis 6 valoribus u, inveniuntur ſex valores m per formulam $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$, & ſex valores n per formulam $n = \frac{t}{m}$, in quibus $t = 24$, $q = -15$, $r = 10$, ut vidimus.

Sit $u = 1$, erit $m = \frac{48}{-4} = -12$; $n = \frac{24}{-12} = -2$

Sit $u = -1$, erit $m = \frac{-48}{24} = -2$; $n = \frac{24}{-2} = -12$

Sit $u = 2$, erit $m = \frac{96}{-12} = -8$; $n = \frac{24}{-8} = -3$

Sit $u = -2$, erit $m = \frac{-96}{32} = -3$; $n = \frac{24}{-3} = -8$

Sit $u = 5$, erit $m = \frac{240}{60} = 4$; $n = \frac{24}{4} = 6$

Sit $u = -5$, erit $m = \frac{-240}{-40} = 6$; $n = \frac{24}{6} = 4$

394. Sex igitur æquationes eruentur e formula

x^2

$x^2 + ux + m = 0$, & ſex e formula $x^2 - ux + n = 0$. Eas hic apponemus cum radicibus inde erutis.

E formula $x^2 + ux + m = 0$

Poſito $u = 1$; $x^2 + x - 12 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+3\\-4\end{array}\right.$

Poſito $u = -1$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+2\\-1\end{array}\right.$

Poſito $u = 2$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+2\\-4\end{array}\right.$

Poſito $u = -2$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+3\\-1\end{array}\right.$

Poſito $u = 5$; $x^2 + 5x + 4 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}-1\\-4\end{array}\right.$

Poſito $u = -5$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+3\\+2\end{array}\right.$

E formula $x^2 - ux + n = 0$

Poſito $u = 1$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+2\\-1\end{array}\right.$

Poſito $u = -1$; $x^2 + x - 12 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+3\\-4\end{array}\right.$

Poſito $u = 2$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+3\\-1\end{array}\right.$

Poſito $u = -2$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+2\\-4\end{array}\right.$

Poſito $u = 5$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}+3\\+2\end{array}\right.$

Poſito $u = -5$; $x^2 + 5x + 4 = 0$; $x = \left(\begin{array}{l}-1\\-4\end{array}\right.$

395. Atque hic in primis patet illud, quod ſupra monuimus num. 388, æquationes provenientes e ſecunda formula, eſse prorſus eaſdem, ac provenientes

e

e prima ita, ut, quam exhibet prima, adhibito altero e binis valoribus u ortis ab eodem valore y, exhibeat ſecunda adhibito altero.

396. Deinde patet; quodvis æquationum binarium, ſive earum, quas exhibent binæ formulæ adhibito uno e valoribus u, ſive earum, quas exhibet eadem formula adhibitis binis ejuſmodi valoribus derivatis ab eodem valore y, exhibere eaſdem quatuor radices, 3, -4, 2, -1, quas eſſe radices æquationis propoſitæ $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, patebit ſubſtituenti. Atque idcirco quodvis binarium pariet ope multiplicationis hanc æquationem eandem, quod pariter patebit multiplicanti.

397. Inde vero facile invenientur radices æquationis propoſitæ $z^4 - 8z^3 + 9z^2 + 38z - 40 = 0$. Cum enim ſit $z = x + 2$ illæ quatuor radices ſeu quatuor valores z habebuntur, ſi radicibus 3, -4, 2, -1 addatur 2, eruntque 5, -2, 4, 1, quod ſubſtitutione patebit.

398. Sed immorandum nonnihil in contemplanda reſolutione illius æquationis $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$. In ſex æquationibus inventis, patet, haberi omnes ſex combinationes illarum quatuor radicum 3, -4, 2, -1. Nam in prima proveniente ex prima formula habetur prima, & ſecunda, prima & tertia habetur in ſexta, prima & quarta in quarta, ſecunda & tertia in tertia, ſecunda, & quarta in quinta, tertia & quarta in ſecunda. Id autem neceſſario debuit contingere. Nam valores, u, m, n determinati ſunt ex hac conditione tantummodo quod æquatio $x^2 + ux + m$ contineat binas e quatuor radicibus æquationis $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, ac æquatio $x^2 - ux + n = 0$ alias binas. Cum igitur quodcunque binarium eandem prorſus relationem habeat ad æquationem illam gradus quarti; non poteſt unum potius utravis ex iis æquationibus ſecundi

gra-

gradus exhibere, quam aliud, ſed utralibet debet neceſſario exhibere quodvis binarium; cumque in quaternario contineantur ſex binaria, patet, in utravis ex iis æquationibus debere contineri ſex æquationes, & eaſdem ſex in altera, quod aliter fieri non poteſt niſi ope ſex valorum ſingularum e quantitatibus aſſumptis u, m, n.

399. Inde autem conſequitur, æquationem, qua ex ſola notitia æquationis illius quarti gradus comparata cum ea, quam binæ aſſumptæ generant, determinari poſſit quævis ex iis tribus quantitatibus aſſumptis, debere aſſurgere ad ſextum gradum, ut ad eum pertigit æquatio eruta pro u. Atque hinc etiam patebit, quanti uſus fuerit eliminare prius ſecundum terminum, tum quærere valorem u potius quam m, vel n. Eliminato ſecundo termino aſſumendæ fuerunt æquationes, in quarum altera valor u eſſet æqualis alterius valori accepto cum ſigno contrario; nam is cum exprimat coefficientem ſecundi termini; exprimit ſummam binarum radicum cum ſigno contrario acceptarum; cumque ob eliminatum ſecundum terminum ſumma omnium debeat eſſe $=0$; binarum quarumque ſumma debet eſſe æqualis ſummæ reliquarum cum ſigno contrario acceptæ. Quare e ſex valoribus u, terni debent eſſe replicati cum ſola ſignorum differentia, & valores u^2 debent proinde eſſe tres tantum. Idcirco in æquatione eruta pro u debent alterni termini deeſſe, relictis ſolis potentiis u paribus ita, ut poſito $y=u^2$ æquatio deprimatur ad tertium gradum, quod quidem contigit. At ſi non eliminato ſecundo termino tentetur determinatio equationum ſecundi gradus componentium equationem quarti, eæ debebunt habere coefficientem diverſum ſecundi termini, & eſſe $x^2+ux+m=0$, $x^2+zx+n=0$, ac ſi æquatio inde orta comparetur cum æquatione $x^4+px^3+qx+r=0$, debebit pro u exhibere ſex diverſos valores ita, ut etiam u^2

ſex

ſex diverſos valores habeat; & proinde æquatio inde orta non careret omnibus terminis poteſtatum imparium, nec ad tertium gradum reduci poſſet, niſi ejuſmodi novis ſubſtitutionibus, quæ ſex diverſos valores redigerent ad tres. Pariter ſi eliminato ſecundo termino quæratur æquatio pro m, vel n invenietur æquatio gradus ſexti non deprimibilis ſine novis admodum moleſtis ſubſtitutionibus, quæ demum eo reciderent, ut valor u^2 immediatè determinaretur.

400. Patebit facile oriri ejuſmodi æquationem ſexti gradus pro m; ſi ex illis tribus æquationibus numeri 386, nimirum $-u^2+m+n=q$, $-mu+nu=r$, $mn=t$, eliminentur potius n, & u. Facto enim in tertia $n=\frac{t}{m}$, ſecunda evaderet $-mu+\frac{tu}{m}=r$, ſive $-mmu+tu=mr$, & $u=\frac{mr}{-mm+t}$. Hiſce valoribus n, & u ſubſtitutis in prima, eſſet $\frac{-m^2r^2}{(-mm+t)^2}+m+\frac{t}{m}=q$, in qua multiplicando per $m(-mm+t)^2$, ſive per $m(m^4-2m^2t+t^2)$, ordinatis terminis haberetur æquatio $m^6-qm^5-tm^4-r^2m^3-t^2m^2$
$+2tqm^3$
$-qt^2m+t^3=0$, ac ſimili prorſus modo erueretur æquatio pro n, quin eadem prorſus evaderet, ſex valoribus exiſtentibus utrobique prorſus iiſdem, ut eruitur etiam ex num. 388, & 395.

401. Hujuſmodi autem æquatio reduceretur ad priorem formam, ſubſtituto pro m valore illo $\frac{2tu}{u^3+qu+r}$ numeri 387, ut æquatio quoque prodiens ante eliminationem ſecundi termini ſubſtitutione alia, quæ eidem elimi-

eliminationi æquivaleret, eodem reduci poſſet, ſed iſta fuſius perſequi infinitum eſſet, ac Tyroni harum meditationum cupidiori, & vividioris ingenii facile inſinuabit Præceptor. Illud tantum notabimus determinato valore u, valorem m admodum facile determinari per æquationem $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$, cum contra valore m determinato, valor u inde erui non poſſit; niſi per æquationem tertii gradus hujuſmodi $mu^3 + mqu + mr = 2tu$, ſive $u^3 + \frac{mq - 2t}{m} u + r = 0$; quod iterum demonſtrat æquationem pro u potius, quam pro m, vel n inveſtigandam fuiſſe.

402. Præterea illud etiam non omittendum; nullam adeſſe ſpem; ut ejuſmodi methodo altiorum graduum radices inveniantur; ut nec pro tertio gradu potuit adhiberi. Si enim ad reſolutionem tertii gradus aſſumerentur æquationes $x^2 + ux + m = 0$, & $x - u = 0$; valor u exprimeret quamvis e tribus radicibus cum ſigno contrario acceptis in poſteriore, vel binarum quarumvis ſummam in præcedenti, & valor m productum pariter e binis quibuſvis. Quamobrem cum tres diverſæ radices ſint, & tria diverſa trium radicum binaria (per num. 92) debet tam pro valore u, quam pro m deveniri iterum ad æquationem gradus tertii; atque id ipſum conſtabit comparanti æquationem inde ortam cum æquatione $x^3 + qx + r = 0$. Si autem quinti gradus æquatio reducatur per binas $x^3 + ux^2 + mx + l = 0$, $x^2 - ux + n = 0$, quoniam continet u binaria radicum cum ſignis contrariis acceptarum in ſecunda, ternaria in prima (per num. 242), & quinque radicum tam binaria, quam ternaria ſunt decem (per num. 92) ad decimum ſaltem gradum aſſurgeret æquatio pro u: in ſexto au-

tem gradu per æquationes $x^3 + ux^2 + mx + l = 0$, $x^3 - ux^2 + nx + h = 0$, continente u ſex radicum ternaria, quę ſunt 20, ad vigeſimum gradum aſcenderetur, licet is ob ternaria poſitiva aliis totidem negativis cum ſigno contrario acceptis æqualia reduceretur ad decimum, deficientibus potentiis imparibus, ut ſupra in gradu quarto, per equationes vero $x^4 + ux^3 + mx^2 + lx + h = 0$, $x^2 - ux + n = 0$, continente u binaria in poſteriore, quaternaria in priore, quæ in 6 radicibus ſunt 15, haberetur gradus decimus quintus. Aç eodem pacto in ſuperioribus multo altius aſcenderetur, ac gradus ille, qui reſolvendus erat tranſcenderetur.

403. Cæterum, ut ad æquationes quarti gradus regrediamur, adhibuimus exemplum, in quo omnes quatuor radices erant reales, & rationales, & idcirco etiam ęquatio illa ſubſidiaria gradus tertii habuit omnes tres radices reales, & rationales. At plures alii caſus, haberi poſſunt, qui reducuntur ad ſequentes. In primis quotieſcunque omnes quatuor radices fuerint reales in æquatione quarti gradus; omnes tres radices in æquatione tertii erunt pariter reales. Et ſi illæ contineantur binis ęquationibus ſecundi gradus irrationalitate carentibus, quarum altera contineat binas radices irrationales, altera vero vel rationales, vel irrationales, ęquatio tertii gradus habebit unicam tantum radicem rationalem quæ ſit quadratum. Quod ſi illa ęquatio quarti gradus componetur e binis ſecundi irrationalitate carentibus, quarum altera contineat radices imaginarias, utcunque altera vel imaginarias contineat, vel reales, atque has vel rationales, vel irrationales, æquatio tertii gradus habebit unam e radicibus realem, & rationalem, quę ſit quadratum, reliquas imaginarias vel negativas quarum deinde radices quadratę imaginarię ſint. In omnibus caſibus huc uſque expoſitis æquatio quarti deprimi poteſt diviſione facta per ęquationem ſecundi. Quod ſi ea vel deprimi poſſit ſolum per diviſionem

primi

primi gradus, vel nullo modo; æquatio tertii gradus nullam habebit radicem rationalem, ſaltem, quæ ſit quadratum, habebit autem reales omnes, & poſitivas, ſi omnes æquationis quarti gradus reales fuerint, quarum ſi binæ fuerint reales, & binæ imaginariæ, habebit ſaltem unam realem, & poſitivam.

404. Fundamentum horum omnium theorematum in eo eſt ſitum, quod bini valores *u*, ſive unicus valor *y* debent continere ſummas binarum radicum cum ſignis contrariis acceptarum, ſeu coefficientes ſecundorum terminorum binarum æquationum ſecundi gradus, in quas illa quarti reſolvitur. Porro ſummæ radicum realium ſemper reales ſunt, & rationalium rationales. Irrationalium, & imaginariarum quæ oriuntur ab iiſdem æquationibus ſecundi gradus irrationalitate carentibus reales ſunt, & rationales, ſed ſi irrationalis orta ex una conjungatur cum rationali, vel cum irrationali orta ex alia, ſumma erit irrationalis, ſi vero imaginaria orta ex una conjungatur, cum reali, vel cum imaginaria orta ex alia, ſumma pariter eſt imaginaria. Quod ſi æquatio propoſita deprimi non poſſit ad duas ſecundi gradus irrationalitate carentes; valor *u* & *y* rationalis nequaquam erit. Infinitum eſſet ſingula exemplis illuſtrare. Facile erit exempla deſumere multiplicando per ſe invicem equationes plures ſecundi, vel primi gradus; & in his, ac in ſuperioribus illis, quæ ad altiorum equationum reductionem pertinent, habet Præceptor uberem ſane campum, in quo Tyronem cupidum, & ſatis otii nactum exercere poſſit. Pauca delibabimus.

405. Sit æquatio $x^4 - 8x^2 + 4x + 3 = 0$. Conferendo eam cum æquatione $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$. Erit $q = -8$, $r = 4$, $t = 3$. Quare $y^3 + 2qy^2 + q^2 y - 4ty - rr = 0$, que erat æquatio tertii gradus num. 387, erit $y^3 - 16y^2 + 52y - 16 = 0$, in qua diviſores,

qui uſui eſſe poſſint, ſunt quadrata diviſorum num. 4 $=r$. Is habet diviſores 1, 2, 4; quorum quadrata 1; 4, 16. Horum ſecundum tantum nimirum 4 ſatisfacit, ac diviſa ea æquatione per $y-4$, habetur $y^2 - 12y + 4 = 0$; cujus binæ radices $6 \pm \sqrt{32}$ ambæ reales ſed irrationales. Quare tres valores y ſunt 4; $6+\sqrt{32}$, $6-\sqrt{32}$; & ſex valores u ſunt 2, -2, $\sqrt{6+\sqrt{32}}$, $-\sqrt{6+\sqrt{32}}$, $\sqrt{6-\sqrt{32}}$, $-\sqrt{6-\sqrt{32}}$; vel quoniam methodo expoſita num. 223 extrahitur radix ex binomio $6 \pm \sqrt{32}$, & eſt $2 \pm \sqrt{2}$, ſex valores u erunt 2, -2, $2+\sqrt{2}$, $-2-\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$.

406. Adhibito primo tantum valore y, ex $u=2$ fiet

$$m = \frac{2tu}{u^3+qu+r} = \frac{12}{8-16+4} = \frac{12}{-4} = -3,$$ ex u

$$=-2 \text{ erit } m = \frac{-12}{-8+16+4} = \frac{-12}{12} = -1.$$ Quare

binæ æquationes, in quas reſolvitur æquatio propoſita, ſunt $x^2+2x-3=0$, $x^2-2x-1=0$, quæ quidem multiplicatæ per ſe invicem illam pariunt. Porro prioris radices ſunt 1, & -3, poſterioris $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$. Si cum ſignis contrariis accipiantur prima cum ſecunda, prima cum tertia, prima cum quarta, ſecunda cum tertia, ſecunda cum quarta, tertia cum quarta, habentur 2, $-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, -2, ubi redeunt illi ipſi ſex valores u, licet diverſo ordine. Primus autem, & poſtremus ſunt rationales, & pertinent ad illas binas æquationes irrationalitate carentes; reliqui cum irrationalitatem contineant, eandem inducunt in valorem u, & y. Ceterum ſi quatuor æquationes primi gradus $x+2=0$, $x-2=0$, $x-2-\sqrt{2}=0$, $x-2+\sqrt{2}=0$, $x+2-\sqrt{2}=0$, $x+2+\sqrt{2}=0$, quocunque ordine

mul-

multiplicentur inter ſe; ſemper parient illam gradus quarti, & ſi ad ſex binaria reducantur, ſingula parient æquationes ſingulas gradus ſecundi, & in ſingulis continebuntur ſinguli ex illis 6 valoribus *u*; ac ex valoribus *m* inveniendis per *u*.

407. In ſequenti exemplo aſſumemus æquationem reſolubilem in binas irrationalitate carentes, quarum utraque contineat radices imaginarias; & tamen unus e valoribus ſi erit realis rationalis, ac quadratus, habens binos valores *u* reales, & rationales. Sit æquatio $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$. Erit $q = 1$, $r = 2$, $t = 6$. Quare æquatio $y^3 + 2qy^2 + q^2 y - rr = 0$, erit $y^3 + 2y^2 - 23y - 4 = 0$, in qua diviſores, qui uſui eſſe poſſunt, ſunt quadrata diviſorum numeri $2 = r$. Is habet diviſores 1, 2, quorum quadrata 1, 4. Horum ſecundum tantum ſatisfacit nimirum 4. & diviſa ea æquatione per $y - 4$, habetur $y^2 + 6y + 1 = 0$, cujus binæ radices $-3 \pm \sqrt{8}$, ambæ negativæ, licet reales, ex quibus nimirum valores *u* proveniunt imaginarii $\pm\sqrt{(-3 \pm \sqrt{8})}$; vel quoniam ex $-3 \pm \sqrt{8}$ poteſt extrahi radix, quæ eſt $\sqrt{-2} \pm \sqrt{-1}$, ſex valores *u* erunt 2, -2, $\sqrt{-2} + \sqrt{-1}$, $-\sqrt{-2} + \sqrt{-1}$, $\sqrt{-2} - \sqrt{-1}$, $-\sqrt{-2} - \sqrt{-1}$.

$$-4ty$$

408. Adhibito primo tantum valore *y*, ex $u = 2$ erit $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r} = \frac{24}{8 + 2 + 2} = \frac{24}{12} = 2$, ex $u = -2$ erit $m = \frac{-24}{-8 - 2 + 2} = \frac{-24}{-8} = 3$. Quare binæ æquationes, in quas reſolvitur æquatio propoſita ſunt $x^2 + 2x + 2 = 0$, $x^2 - 2x + 3 = 0$,

$= 0$, quæ quidem multiplicatæ per ſe invicem illam pariunt. Porro prioris radices ſunt $-1+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}-1$, poſterioris $1+\sqrt{-2}$, $1-\sqrt{-2}$. Si cum ſignis contrariis accipiantur binaria eodem ordine, quo ſupra num. 406, habentur 2, $-\sqrt{-1}-\sqrt{-2}$, $-\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$, $\sqrt{-1}-\sqrt{-2}$, $\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$, -2, ubi redeunt illi ipſi ſex valores u, licet diverſo ordine. Primus autem, & poſtremus ſunt reales, & rationales & pertinent ad illas binas æquationes imaginarietate carentes, & irrationalitate. Reliqui cum imaginarietatem contineant, eandem inducunt in valorem u, licet in valorem y non inducant. Cæterum ſi quatuor æquationes primi gradus ortæ ex hiſce radicibus utcumque multiplicentur, reddent eandem illam æquationem gradus quarti, & diſtributæ in binaria exhibentia ſex æquationes gradus ſecundi, habebuntur in ſingulis ſinguli valores u & ſinguli m derivandi ex u.

409. Atque ut ſpecimen aliquod habeatur binarum æquationum ſecundi gradus, quæ oriantur ex aliis binariis continentibus quantitates imaginarias, ductis in ſe invicem $x+1-\sqrt{-1}=0$, $x-1-\sqrt{-2}=0$, oritur æquatio

$$\begin{array}{llll} x^2 & -x\sqrt{-1}-1 & & =0 \\ & -x\sqrt{-2}+\sqrt{-1} & & \\ & & -\sqrt{-2} & \\ & & +\sqrt{2} & \end{array}$$

ductis autem $x+1+\sqrt{-1}=0$, $x-1+\sqrt{-2}=0$, oritur æquatio.

$$\begin{array}{llll} x^2 & +x\sqrt{-1}-1 & & =0 \\ & +x\sqrt{-2}-\sqrt{-1} & & \\ & & +\sqrt{-2} & \\ & +\sqrt{2} & +\sqrt{2} & \end{array}$$

His

His autem invicem multiplicatis, & eliſis terminis, qui ſe deſtruunt, redit illa ipſa æquatio propoſita gradus quarti $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$.

410. Notari autem poteſt generaliter illud, æquationem quarti gradus, quæ poſtremum terminum negativum habeat, non poſſe habere omnes radices imaginarias. Nam æquationes ſecundi gradus, quæ imaginarias quantitates contineant, debent habere poſtremum terminum poſitivum (per num. 215); ac proinde ſi ambæ eæ, ex quibus oritur equatio quarti, habeant radices imaginarias; habebunt ambæ poſtremos terminos poſitivos, ex quorum multiplicatione poſtremus terminus quartæ orietur poſitivus etiam ipſe. Quamobrem ſi equatio quarti gradus negativum habeat poſtremum terminum, jam ſtatim conſtabit, ſaltem binas haberi radices reales, quod ſequenti §. generaliter demonſtrabimus de omnibus æquationibus gradus paris; ut & de gradu impare oſtendimus ſemper ſaltem unam haberi radicem realem.

411. Contra vero ſi æquatio illa tertii gradus, que exhibet valorem y, non alternet omnia ſigna terminorum; manifeſtum erit (per num. 250), haberi radices imaginarias in æquatione gradus quarti; & ſi omnia ſigna continuet, nullo alternato, conſtabit omnes radices imaginarias eſſe. Nam ibi demonſtravimus omnia ſigna alternari, ubi omnes radices reales, & poſitive ſunt, omnia continuari, ubi omnes negative. Quare ſi non omnia alternantur, non omnes valores y, erunt reales, & poſitivi; quod requiritur ad hoc, ut omnes valores u reales ſint; Si autem omnes continuantur, nullus habebitur realis, & poſitivus valor y, adeoque nullus realis u; quanquam poterunt omnes radices eſſe imaginarie alternatis etiam ſignis, cum poſſint valores u, & m eſſe reales, & adhuc æquationes ſecundi gradus continere valores imaginarios.

412. In primo exemplo, in quo num. 391 omnes radices æquationis quarti gradus reales erant, inveni-

mus $y^3 - 30 y^2 + 129 y - 100 = 0$, ubi omnia ſigna alternantur. Idem in ſecundo contigit eadem de cauſa num. 405, ubi pariter & radices omnes æquationis quarti gradus reales fuerunt, & æquatio $y^3 - 16 y^2 + 52 y - 16 = 0$ omnia ſigna alternavit in poſtremo demum exemplo, num. 407 omnes radices imaginarię erant, & æquatio tertii gradus $y^3 + 2 y^2 - 23 y - 4 = 0$ habuit unam alternationem ſignorum, & binas continuationes, quia binos invenimus valores u, & m reales, qui binas deberunt ſecundi gradus æquationes imaginarietate carentes, in quas ęquatio quarti reſoluta eſt, licet illę ipſæ equationes ſecundi gradus continuerint radices imaginarias.

413. In exemplis huc uſque adhibitis ſemper ęquatio quarti gradus per diviſionem deprimi potuit ad binas ſecundi. Addemus exemplum unicum, in quo ea depreſſio haberi non poteſt, ubi proinde per approximationem eruendus erit valor ſaltem unicus radicis æquationis gradus tertii, quę per approximationem exhibeat coefficientes ſecundorum terminorum, & binos poſtremos terminos æquationum gradus ſecundi. Ejuſmodi ęquatio erit $x^4 + 3 x^2 - 2 x - 3 = 0$. In ea erit $q = 3$ $r = -2$, $t = -3$, Quare ęquatio $y^3 + 2 q y^2 + q^2 y - rr = 0$ erit $y^3 + 6 y^2 + 21 y - 4 = 0$. $- 4 t y$.

In hac cum non omnia ſigna alternentur, jam conſtat (per num. 412), non omnes propoſitę æquationis quarti gradus radices reales eſſe, ut ex termino poſtremo -3 negativo conſtat (per num. 410), ſaltem binas eſſe reales; ac proinde binę reales erunt, & binę imaginarię.

414. Jam vero ſi ęquatio illa tertii gradus habet radices, quę uſui eſſe poſſint ad reſolvendam equationem quarti accurate in duas ſecundi, eę debent eſſe inter quadrata diviſorum numeri $2 = r$. Is numerus habet

divi-

diviſores tantum 1, & 2, quorum quadrata 1, & 4 ac neutrum ſatiſfacit. Propoſita igitur ęquatio quarti gradus deprimi non poteſt per diviſorem duarum dimenſionum, ſive ſecundi gradus. Cumque ejuſdem ęquationis quarti gradus poſtremus 3 habeat diviſores tantum 1, −1, 3, −3, quorum nullus ęquationi ſatisfacit, ea nec per diviſorem ſimplicem formę $x + a$ deprimi poteſt ad binas ęquationes alteram tertii gradus, alteram primi. Quamobrem quęrenda irrationalis expreſſio valoris y realis, & approximatione utendum ad habenda elementa u, & m binarum ęquationum ſecundi gradus in numeris.

415. In ipſa igitur ęquatione $y^3 + 6y^2 + 21y - 4 = 0$, ponatur $z - 2 = y$ ad eliminandum ſecundum terminum, & proveniet $z^3 + 9z - 30 = 0$. Hęc æquatio ob tertium terminum $+9z$ poſitivum habet binas radices imaginarias (per n. 316, 317), & tertia realis, quę (per n. 300) debet habere ſignum contrarium ſigno poſtremi termini -30, eſt poſitiva, nimirum

$$\sqrt[3]{15+\sqrt{(225+27)}} + \sqrt[3]{15-\sqrt{(225+27)}} = \sqrt[3]{15+\sqrt{(252)}} + \sqrt[3]{15-\sqrt{(252)}} = \sqrt[3]{15+15.874508} + \sqrt[3]{15-15.874508} = \sqrt[3]{30.874508} + \sqrt[3]{-0.874508}$$

$3.13713601 - 0.95628624 = 2.18084977$. Quare $y = z - 2$ erit $= 0.18084977$, & $u = \pm\sqrt{y} = \pm 0.42526435$. Cumque ſit $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$ erunt bini valores m alter $+3.9419033$ alter -0.7610536. Quare binę ęquationes ſecundi gradus erunt $x^2 + 0.42526435x + 3.9419033 = 0$, & $x^2 - 0.42526435x - 0.7610536 = 0$, quę qui-

quidem invicem multiplicatę, contemptis ulterioribus decimalibus, exhibent $x^4 + 2.99999993\,x^2 - 1.99999991\,x - 2.99999969 = 0$, ſive quam proxime propoſitam ęquationem $x^4 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$. Porro prima earum ęquationum ſecundi gradus habet binas radices imaginarias $x = -2\ 21263217 \pm \sqrt{0.0452124 - 3.9419033}$, ſive $= -0.27263277 \pm \sqrt{-3.8967909}$; ſecunda vero habet binas radices reales $x = 0:21263217 \pm \sqrt{0.0452124 + 0.7610536} = 0.21263217 \pm \sqrt{8062660} = 0\ 21263217 \pm 0.8979231$, nimirum $x = 1.1105553$, & $x = -0.6852909$.

416. Atque hoc quidem pacto ęquatio quarti gradus reſolvitur in binas ſecundi, ex quibus orta concipitur, comparando terminos homogeneos, & deveniendo ad æquationem gradus ſexti, quę deprimitur ad tertium, ac reſoluta exhibet quęſitos valores. Adeſt autem alia methodus, qua devenitur immediate ad ęquationem gradus tertii exhibentem valores pro binis æquationibus ſecundi continentibus radices propoſitę ęquationis gradus quarti. Hæc autem methodus utitur proprietate illa quadrati, quam num. 95 demonſtravimus, quod nimirum cujuſvis binomii quadratum tribus terminis conſtet, in quibus productum extremorum ęquetur quadrato dimidii termini intermedii, cujus etiam inverſa propoſitio eſt vera; nam ſi in trinomio productum extremorum æquetur quadrato dimidii termini intermedii, erit id trinomium quadratum, cujus radix habebitur, ſi capiantur extremorum terminorum radices, & uniantur cum eodem ſigno, vel cum oppoſitis, prout terminus ille intermedius habuerit ſignum poſitivum, vel negativum. Ea autem inverſa propoſitio ſic facile demonſtratur. In trinomio $a \pm b + c$ ſit $ac = \frac{1}{4}bb$, oportet demonſtrare eſſe $a \pm b + c$,

$= (\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2$. Erit autem nam $(\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 = a \pm 2\sqrt{ac} + c$. Sed ob $ac = \frac{1}{4}bb$ eſt $4ac = bb$, & $\pm 2\sqrt{ac} = \pm b$. Igitur $(\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 = a \pm b + c$: Q.E.D.

417. Ac notandum ob ambiguitatem ſignorum in radicibus habentibus exponentem parem, radicem trinomii $a + b + c$ fore tam $\sqrt{a} + \sqrt{c}$, quam $-\sqrt{a} - \sqrt{c}$, trinomii vero $a - b + c$, fore tam $+\sqrt{a} - \sqrt{c}$, quam $-\sqrt{a} + \sqrt{c}$. Quod ſi e valoribus a, & c, uterque, vel etiam alter negativus fuerit; patet radicem illam debere continere valores imaginarios. Sed niſi b fuerit valor imaginarius, a, & c debebunt eſſe valoris vel ſimul poſitivi, vel ſimul negativi, cum nimirum ex hypotheſi eorum productum debeat æquari quadrato $\frac{1}{4}bb$ ubique poſitivo.

418. Sit igitur æquatio libera a ſecundo termino $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$. Tranſponendo erit $x^4 = -qx^2 - rx - t$. Fiat quadratum binomii $x^2 + y$; nimirum $x^4 + 2yx^2 + y^2$; & addito utrinque $2yx^2 + y^2$, erit $x^4 + 2yx^2 + y^2 =$

$$= -qx^2 - rx - t$$
$$+ 2yx^2 \quad + y^2$$

In hac æquatione primum membrum eſt quadratum habens pro radice $x^2 + y$: Secundum vero membrum fiet quadratum, ſi ita aſſumatur illa arbitraria y, ut productum extremorum æquetur quadrato dimidii intermedii termini; Ponendum igitur $(-qx^2 + 2yx^2) \times (-t + y^2) = \frac{1}{4}rrxx$; ſive dividendo utrinque per x^2, erit $(-q + 2y) \times (-t + y^2) = \frac{1}{4}rr$. Facta autem

tem

tem multiplicatione habetur $+qt - qy^2 - 2ty + 2y^3 = \frac{1}{4}rr$, & tranſponendo, ordinando, ac dividendo per 2 erit $y^3 - \frac{1}{2}qy^2 - ty + \frac{1}{2}qt = 0$

$$- \frac{1}{8}rr$$

Invento valore y in hac æquatione ſecundum illud membrum $-qx^2 - rx - t$, habebit pro radice

$$\begin{array}{l} \qquad\quad +2yx^2 \qquad\qquad +y^2 \\ \pm x\sqrt{(-q+2y)} \pm \sqrt{(-t+y^2)} \end{array}$$

, aſſumptis ſignis difformibus, vel conformibus, prout r fuerit valoris poſitivi vel negativi, adeoque e contrario terminus intermedius $-rx$ negativus, vel poſitivus. Tum vero habebitur $x^2 + y = \pm x\sqrt{(-q+2y)} \pm \sqrt{(-t+y^2)}$. Nimirum poſito $\sqrt{(q+2y)} = n$ & $\sqrt{(-t+y^2)} = m$ habebuntur binæ æquationes ſecundi gradus $x^2 - nx$

$$\begin{array}{l} -m = 0, \;\&\; x^2 + nx + m = 0, \text{ ſi } r \text{ fuerit va-} \\ +y \qquad\qquad\qquad\quad +y \end{array}$$

loris negativi; ac $x^2 - nx + m = 0$, & $x^2 + nx$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +y \\ -m = 0, \text{ ſi } r \text{ fuerit valoris poſitivi, ac patet hic} \\ +y \end{array}$$

etiam tria binaria æquationum ſecundi gradus obtineri poſſe, cum æquatio tertii gradus exhibere poſſit ternos valores y, & eorum ſinguli binas exhibeant æquationes ſecundi gradus.

419. Sit æquatio $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, quam adhibuimus num. 391. In ea erit $q = -15$, $r = 10$, $t = 24$. Quare æquatio ſubſidiaria gradus

tertii

tertii $y^3 - \frac{2}{2} qy^2 - ty + \frac{1}{2} qt - o$ fiet $y^3 + \frac{15}{2} y^2$
$- \frac{1}{8} rr$
$- 24y - \frac{385}{2} = 0$, quæ ſi multiplicetur per progreſſionem 1, 2, 4, 8, evadet $y^3 + 15y^2\ 96\ y - 1540 = 0$, quę habet omnes tres radices rationales 10, $-$ 11, $-$ 14. Quare prioris radices harum dimidiæ erunt 5, $-$ 5. 5, $-$ 7. Aſſumptis pro y hiſce valoribus invenientur $u = \sqrt{(-q + 2y)}$, & $m = \sqrt{(-t + y^2)}$, ac æquationes $x^2 - ux + m = 0$, & $x^2 + ux - m = 0$,
$\qquad\qquad + y \qquad\qquad\qquad\qquad + y$
retento eodem ſigno in u & m, ob valorem r poſitivum $= 10$. Erunt autem.

ex	valores u, & m	Æquationes	radices
$y = 5$	($u = 5$)	$x2 - 5x + 6 = 0$	($+3$ ($+2$
	($m = 1$)	$x^2 + 5x + 4 = 0$	(-1 (-4
$y = - 5.5$	($u = 2$)	$x^2 - 2x - 3 = 0$	($+3$ (-1
	($m = 2.5$)	$x^2 + 2x - 8 = 0$	($+2$ (-4
$y = - 7$	($u - 1$)	$x^2 - x - 2 = 0$	($+2$ (-1
	($m = 5$)	$x^2 + x - 12 = 0$	($+3$ (-4

420. Hoc pacto redeunt illæ eædem ſex æquationes ortæ ex illis iiſdem ſex binariis earundem quatuor radicum, quas priore methodo inveneramus num. 394. Ubi vero ęquatio tertii gradus rationales radices non habeat, recurrendum ad approximationem, ut in poſtremo exemplo prioris methodi.

421. Atque hic notandum, ubi ex $x^4 + 2y\, x_2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad + y$

$+ y^2 = - q x^2 - r x - t$ extrahitur radix, tam
$+ 2 y x^2 \quad . \quad + y^2$

primum membrum quam ſecundum ; binas radices habere : nimirum primi membri radix eſt tam $x^2 + y$, quam $- x^2 - y$, ut ſecundi eſt $+ x \sqrt{(-q + 2y)} + \sqrt{(-t + y^2)}$ & $- x \sqrt{(-q + 2y)} - \sqrt{(-t + y^2)}$; unde, prima fronte videri poſſet quatuor diverſas æquationes profluere, combinata utravis e prioribus binis cum utralibet e poſterioribus. Sed cum idem ſit combinare poſitivam prioris membri, cum poſitiva poſterioris, ac illius negativam, cum hujus negativa, & pariter idem illius poſitivam cum hujus negativa, ac illius negativam cum hujus poſitiva ; illæ quatuor reducuntur ad binas a nobis adhibitas, quas exhibet una tantum e radicibus prioris membri combinata cum utravis e radicibus poſterioris. Nimirum eadem prorſus æquatio eſt $x^2 + y = x \sqrt{(-q + 2y)} + \sqrt{(-t + y^2)}$; ac $- x^2 - y = - x \sqrt{(-q + 2y)} - \sqrt{(-t + y^2)}$; & pariter eadem $x^2 + y = - x \sqrt{(q - y2)} - \sqrt{(-t + y^2)}$, ac $- x^2 - y = x \sqrt{(-q + 2y)} + \sqrt{(-t + y^2)}$; quod ipſum notari poteſt ubi num. 206 reſolvuntur generaliter æquationes ſecundi gradus.

422. Pariter notari poteſt etiam illud. Hac methodo uti licet etiam ante eliminatum ſecundum terminum. Sit æquatio $x^4 + p x^3 + q x^2 + r x + t = 0$, ſive $x^4 + p x^3 = - q x^2 - r x - t$. Aſſumatur $x^2 + \frac{1}{2} p x + y$, & facto ejus quadrato x^4

+ p

$px^3 + (\frac{1}{4}pp + 2y)x^2 + pxy + y^2$, erit $=$ $(-q + \frac{1}{4}pp + 2y)x^2 + (-r + py)x + (y^2 - t)$, ubi facto $(-q + \frac{1}{4}pp + 2y) \times (y^2 - t) = (\frac{-r + py}{2})^2$ haberetur æquatio magis quidem mplexa, ſed adhuc tertii gradus pro y, cujus valore invento, jam binæ æquationes forent $x^2 + \frac{1}{2}px + y = \pm\sqrt{(-q + \frac{1}{4}pp + 2y)} \pm \sqrt{(y^2 - t)}$ adhibito utrobique in ſecundo membro ſigno eodem, vel ſignis mutatis prout $-r + p$ fuerit valor poſitivus, vel negativus. Sed præſtat ſecundum terminum tollere, ut habeantur reliqua minus implexa.

423. Demum notetur hic etiam eodem artificio reſolvi æquationes $x^{4m} + px^{3m} + qx^{2m} + rx^{m} + t = 0$, quicunque fuerit valor m, cum facto $y = x^m$ reducatur ad $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + t = 0$.

§. XIV.

De radicum limitibus, & mutationibus valoris formulæ orti ex diverſis ſubſtitutionibus factis pro quantitate incognita: ubi de methodo inveſtigandi maxima, & minima.

424. EXpoſita reſolutione æquationum gradus tertii & quarti, tranſeundum eſſet ad æquationes altiorum graduum. At nulla adhuc generalis methodus inventa eſt, qua altiorum graduum æquationes reſolvi poſſint inveniendo formulam, quæ valorem radi-

cum

tum exhibeat. Methodum adhibitam pro æquationibus gradus quarti non poſſe ad altiores gradus traduci oſtendimus ſuperiore §. Quaſdam per diviſiones deprimi ad gradum inferiorem oſtendimus num. 74; quæ quidem ſi deprimantur ita ut quartum jam non excedant gradum, reſolvuntur methodis traditis huc uſque. Eas quæ habeant hanc formam $x^{m} + p = 0$, $x^{2m} + px^{m} + q = 0$; $x^{3m} + px^{2m} + qx^{m} + r = 0$, $x^{4m} + px^{3m} + qx^{2m} + rx^{m} + t = 0$, reduci ad primum, ſecundum, tertium, quartum gradum ponendo $x^{m} = y$, tum reſolvi vidimus num. 204, 220, 371, 423, in quibus inventa algebraica expreſſione valoris y, invenitur etiam expreſſio valoris $x = \sqrt[m]{y}$. In reliquis omnibus approximatione utendum.

425. Ut autem vero quamproximas radices eruamus, tradendæ ſunt methodi, quibus ad eas liceat utcumque accedere, quæ potiſſimum ſunt binæ: altera qua limites radicum inveſtigantur, altera, qua diverſis valoribus ſubſtitutis pro x, inveſtigatur valor primi membri æquationis, qui debet evadere $= 0$, accurate, vel proximè, ut valor ille ſubſtitutus poſſit congruere accuratè vel proximè cum radice ipſa. Agemus igitur hic de limitibus radicum & de effectu ſubſtitutionum in formulis algebraicis, ex qua conſideratione pandetur nobis aditus ad æquationum reſolutionem; & interea alii quoque ſatis uberes profluent fructus, potiſſimum pro quæſtionibus de maximis, & minimis.

426. Sæpe limites aliqui inveniuntur conſiderando coefficientes ipſos, quod in æquationibus gradus tertii præſtitimus num. 364. Sed ii raro admodum ſolent eſſe ſatis arcti, nec ſemel inventi poſſunt arctiores reddi. Ut igitur ad alias methodos progrediamur, inveſtigari limites poſſunt etiam demendo aliquid in altero æquationis membro, ut in altero minus remaneat, quo artificio di-

dividendo deinde, ac radices extrahendo, quandoque uterque limes invenitur, quandoque unicus, ac limitis jam inventi ſubſtitutione pro incognita ſæpe ad radicem magis acceditur. Ne autem hujus methodi præcepta ſine ulla neceſſitate multiplicentur, oſtendemus, quo pacto poſitivarum radicum limites inveſtigari poſſint, quæ pro negativis etiam eundem habebit uſum, ſi negativæ juxta num. 249. mutentur in poſitivas, mutatis nimirum alternorum æquationis ad debitam redactæ formam terminorum ſignis.

427. Termini omnes negativi in alterum membrum per tranſpoſitionem mutentur ita, ut fiant poſitivi. Tum ſi alterum membrum conſtet unico termino incognitam continente, alterum pluribus, quorum aliquis contineat potentiam incognitæ ſuperiorem ea, quæ habetur in priore membro, & aliquis inferiorum (inferiori autem potentię nomine intelligimus etiam potentiam o, ſeu terminum cognitum, quem incognita non ingreditur); ſemper inveniri poterit uterque limes, omittendo in membro plures terminos continente reliquos omnes pręter unicum, primo quidem continentem potentiam incognitę altiorem, tum inferiorem; quo pacto id membrum manebit reliquo minus, ac dividendo per incognitam quoties licet, manebit in primo caſu quædam potentia incognitæ minor quantitate cognita; in ſecundo quędam quantitas cognita minor quadam potentia incognitæ, & inde nullo negotio uterque eruetur limes.

428. Sit æquatio $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$. Tranſponendo terminum negativum habetur $x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 4 = 10x^3$. Quoniam in ſecundo membro habetur unicus terminus incognitam continens, & in eo poteſtas incognitę minor eſt, quam in prioribus binis primi membri & major quam in binis poſtremis ejuſdem, bini poterunt inveniri limites tam vero minores, quam majores. Retento enim ſolo primo termino primi membri habetur $x^5 < 10x^3$

$x^3 \quad x^2 < 10$, $x < \sqrt{10}$, ſive $x < 3.2$, ubi pro radice numeri 10, quę verſatur inter 3.1, 3.2 aſſumpſimus 3.2, ut nimirum valor x, qui debuit eſſe $< \sqrt{10}$ ſit certo minor, quam 3.2, ac ſemper impoſterum in hac limitum inveſtigatione, ubi occurrent arithmeticę operationes, in quibus verus valor obtineri non poſſit, vel, licet poſſit, negligantur inferiores fractiones, aſſumemus valorem proximum, vel minorem, vel majorem vero ita, ut membrum, quod debuit remanere majus, vel minus, multo etiam majus, vel multo minus remaneat. Retento autem ſolo ſecundo termino erit $2x^4 < 10x^3$, $2x > 10$, $x < 5$, qui limes eſt priore remotior. At retento ſolo tertio erit $2x^2 < 10x^3$, $2 < 10x$, $\frac{1}{5} < x$, ſive $x > \frac{1}{5}$, vel $x > 0.2$: retento autem ſolo quarto fit $4 < 10x^3$.

$x^3 > \frac{4}{10}$, $x > \sqrt[3]{0.4}$, $x > 0.7$, qui limes priore eſt propior. Includitur igitur radix poſitiva quævis hujus æquationis, inter 0.7, ac 3.2.

429. Si æquatio fuiſſet $x^5 - 2x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 4 = 0$, & quęſiti fuiſſent limites radicum negativarum, mutatis ſignis alternorum terminorum quorum penultimus hic deeſt, haberetur $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$, nimirum illa ipſa prior æquatio, in qua poſitivę radices verſantur inter 0.7, 3.2, adeoque propoſitæ æquationis radices negativæ inter -0.7, -3.2.

430. Si in altero membro habeatur poſt tranſpoſitionem unicus terminus continens potentiam incognitæ minimam omnium, quę habentur in altero, vel omnium maximam, ſemper inveniri poterit eadem methodo limes in priore caſu minor vero, in poſteriore major. Sit

Sit æquatio $x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 64 = 0$; Tranſpoſito termino negativo erit $x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$. Retento ſolo tertio termino primi membri, erit $2x^2 < 64$, $x^2 < 32$, $x < \sqrt{32}$, $x < 5.7$. Retento ſolo ſecundo, erit $3x^3 < 64$, $x^3 < 21.4$, $x < \sqrt[3]{21.4}$, $x < 2.8$. Retento ſolo primo erit $x^5 < 64$, $x < \sqrt[5]{64}$, $x < 2.3$, qui tertius limes eſt omnium proximus vero valori, cum ſit omnium minimus: Ac eodem modo ſi æquatio fuiſſet $x^7 + 3x^5 + 2x^4 - 64x^2 = 0$, tranſponendo obveniſſet $x^7 + 3x^5 + 2x^4 = 64x^2$, & dividendo per x^2 fuiſſet $x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$, ut prius. Quod ſi ſit $x^5 - x^4 - 2x^3 - 243 = 0$, erit $x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$; adeoque $x^5 > 243$, $x > \sqrt[5]{243}$, $x > 3$, vel $x^5 > 2x^3$, $x^2 > 2$, $x > 1.4$, vel $x^5 > x^4$, $x > 1$ quorum limitum proximus eſt 3, qui omnium eſt maximus.

431. Ex limite in primo caſu majore, in ſecundo minore poteſt ſæpe erui alter in illo minor in hoc major dividendo in primo ipſo caſu terminos membri continentis potentias ſuperiores incognitæ per incognitam, ac terminum ea jam carentem in altero membro per limitem majorem vero jam inventum: quo pacto membrum continens incognitam jam erit minus, & continebit præterea terminum cognitum, quo ſublato utrinque, & replicata diviſione, deveniri quandoque poterit ad unicum terminum continentem incognitam & majorem cognito. In ſecundo vero caſu idem præſtabitur quandoque ſubſtituendo in termino continente potentiam maximam valorem limitis inventi vero mino-

ris pro incognita ita, ut deprimatur ad potentiam primi termini alterius membri, tum ſubtrahendo utrinque terminum ipſum primum, ac iterum deprimendo eadem ſubſtitutione eandem illam potentiam maximam, & ſubtrahendo, donec deveniatur ad ſolum terminum cognitum in eo membro, quod prius plures continebat terminos. Res autem exemplis patebit magis.

432. In æquatione $x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$ inventus eſt num. 430. limes vero major $2 . 3$. Si dividatur primum membrum per x^2 ſecundum per $2 . 3 \times 2 . 3$ fiet $x^3 + 3x + 2 > 12$. Quare $x^3 + 3x > 10$ & iterum dividendo hinc per x, inde per $2 . 3$, erit $x^2 + 3 > 4 . 3$, adeoque $x^2 > 1 . 3$, ac proinde $x > \sqrt{1 . 3}$. $x > 1 . 1$. Verſatur igitur valor radicis poſitivæ inter $1 . 1$, ac $2 . 3$. At in æquatione $x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$ limes vero minor erat ibidem 3. Eo poſito pro x in primo membro erit $3x^4 < x^4 + 2x^3 + 243$, adeoque dempto utrinque x^4 fiet $2x^4 < 2x^3 + 243$. Iterum poſito 3 pro x in primo membro, fiet $6x^3 < 2x^3 + 243$, ac dempto $2x^3$ fit $4x^3 < 243$, $x^3 < 60.75$, $x < 4$. Quare radicis poſitivæ valor verſatur inter 3, & 4.

433. Id tamen non ſemper ſuccedit. Sic ſi in priore æquatione fuiſſet $x^5 + 3x^3 + 16x^2 = 64$, limes major omnium proximus haberetur ex $16x^2 < 64$ $x^2 < 4$, $x < 2$. Diviſione autem facta hinc per x^2 inde per 4 fuiſſet $x^3 + 3x + 16 > 16$, ac dempto utrinque 16 relinqueretur $x^3 + 3x > 0$, unde jam nihil ultra erui poteſt. In æquatione autem poſteriore ſi fuiſſet $x^5 = 3x^4 + 4x^3 + 8$, limes vero

ro

ro minor proximus erueretur ex $x^5 > 3x^4$, ſive $x > 3$, quo valore ſubſtituto pro x in primo membro, fuiſſet $3x^4 < 3x^4 + 4x^3 + 8$, & dempto $3x^4$ utrinque, $0 < 4x^3 + 8$, unde pariter nihil eruitur.

434. Si facta tranſpoſitione in utroque membro plures habeantur termini, hęc methodus inveniendi limites non poteſt ſuccedere. Relicto enim in altero membro unico termino, qui minor erit, quam totum alterum membrum, oporteret & in altero membro omittere omnes terminos præter unicum, ſed jam non conſtaret utrum membrum eſſet majus. Si ſit $x^4 + 2x^3 = 10x + 7$, fieri poteſt $x^4 < 10x + 7$, vel $x^4 + 2x^3 > 10x$, $x^3 + 2x^2 > 10$, ſed inde ulterius progredi non licet ſubtrahendo quidpiam in primo etiam membro, quod poſſet remanere vel æquale, vel majus vel minus.

435. Etiam quando uterque limes invenitur, raro admodum ii limites erunt inter ſe proximi. Quotieſcunque enim plures habebuntur radices poſitivæ vel plures negativę, earum ſingulę, iiſdem limitibus contineri debebunt; ac proinde limites ipſi non poſſunt minus diſtare a ſe invicem, quam radix maxima a minima. Adhuc tamen uſui eſſe poterunt, ubi radices rationales inveſtigantur, nam eæ debent verſari inter poſtremi termini diviſores juxta num. 236, qui ſi multi ſint, labor inventis limitibus, plurimum contrahetur omiſſis nimirum iis omnibus, qui extra limites ipſos jacent. Sic pro æquatione $x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 64 = 0$, inventi ſunt num. 432. limites radicum poſitivarum 1, 1, & 2. 3. Quare ſi ulla habetur rationalis radix poſitiva inter tot diviſores numeri 64, poteſt eſſe ſolum 2. Et quidem ea ipſa eſt radix, & æquationem verificat.

436. Nonnunquam radices etiam imaginariæ deprehen-

hendentur ope limitum ſi nimirum is limes, qui valore radicis debet eſſe major, ſit minor eo, qui debet eſſe minor, quod fieri omnino non poteſt. Si æquatio ſit $x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 64 = 0$, facta transpoſitione erit $x^5 + 3x^3 + 64 = 2x^2$. Quare $x^5 < 2x^2$, $x^3 < 2$, $x < \sqrt[3]{2}$, $x > 1.3$; Rurſus $64 < 2x^2$, $32 < x^2$, $x > \sqrt{32}$, $x > 5.5$. Igitur valor radicis poſitivæ deberet eſſe minor quam 1.3; & major quam 5.5, quod fieri omnino non poteſt. Nulla igitur haberi poteſt ejus æquationis poſitiva radix. Cum vero ob continuationem ſignorum interruptam in terminis $+ 3x^3 - 2x^2$, non omnes radices ejus æquationis negativæ eſſe poſſint per n. 218, & radix poſitiva nulla ſit poſſibilis, oportet imaginarias aliquas radices habeat æquatio.

437. Quamobrem immediatè invenitur limes vero minor, poteſt etiam ſemper magis ad valorem radicis vero minorem accedi, ſubſtituendo in terminis omiſſis valorem jam inventum pro incognita, quo pacto jam minus omittetur, & perpetuò iterata ſubſtitutione nonnunquam eo artificio ad radicem minimam acceditur quamproximè. In æquatione $x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$ neglectis num. 430, prioribus binis terminis ſecundi membri, inventum fuerat $x > 3$. Subſtituto hoc valore pro x in iis, erit $x^5 > 81 + 54 + 243$, $x^5 > 378$; ideoque $x > 3.2$, qui limes radici eſt propior. Si rurſum ponatur in terminis $x^4 + 2x^3$, hic novus limes pro x, acceſſus reſtituto calculo fiet major, & ita porro liceret progredi in infinitum.

438. Verum hæ methodi inveſtigandi radicum limites, & per eos radices ipſas nec generales ſunt, quin immo multo plures caſus excludunt, quam includunt juxta num. 434, & raro admodum ſatis accedunt. Ut

igitur

Igitur ad aliam progredi liceat, quę per ſubſtitutionem rem conficit, præmittenda ſunt quædam, quæ pertinent ad mutationes varias, quas ſubit formula primi membri æquationis ſubſtitutis aliis, atque aliis valoribus pro x, quæ utiliſſima ſunt non ad hanc ſolum inveſtigationem, ut ſupra innuimus, ſed ad nexus omnes inter quantitates a ſe mutuo pendentes, & ad problemata, quæ dicimus *de maximis*, *& minimis*, in quibus nimirum inveſtigatur, ubi unam quantitas quępiam perpętuo variabilis ad maximum aliquem, vel minimum valorem deveniat.

439. Sępe binæ quantitates variabiles ita a ſe invicem pendent, ut altera mutata mutetur & altera. In motu æquabili pendet ſpatium percurſum a ſolo tempore: duplo nimirum, vel triplo tempore duplum, vel triplum ſpatium conficitur. Porro hic nexus, vel poteſt eſſe ejuſmodi, ut altera quantitas perpetuo creſcat, altera perpetuo creſcente, ac mutetur accurate in ratione ſimplici directa alterius, quod in ſuperiore exemplo contingit, vel ut mutetur in aliqua ratione ipſius multiplicata directa, quemadmodum in Geometria globorum ſuperficies ſunt in duplicata, moles autem in triplicata radiorum ratione, vel fieri poteſt e contrario, ut, altera creſcente perpetuo, altera perpetuo decreſcat, ut ſi quantitas quævis in plures partes dividitur, magnitudo ſingularum partium decreſcit in ratione reciproca ſimplici numeri partium, qui quo major eſt, eo ſingulæ partes minores fiunt, ac in Nevvtoni theoria gravitas decreſcit in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a ſe invicem, eo nimirum eſt minor, quo diſtantiarum quadrata majora ſunt.

440. At ſępe ętiam contingit, ut altera perpetuo creſcente, altera perpetuo creſcat per aliquod intervallum, tum incipiat decreſcere, vel viceverſa primo decreſcat tum incipiat creſcere, ac in primo caſu ad maximum quoddam, in ſecundo deveniat ad minimum. Sic dum grave fune pendulum oſcillat, celeritas augetur perpetuo uſque ad mediam oſcillationem, tum perpetuo mi-

nuitur, umbrarum vero longitudo orto ſole, ac procedente die decreſcit, ac facta minima in meridie deinde creſcit uſque ad ſolis occaſum. Quandoque autem altera quantitate perpetuo creſcente altera decreſcit ita, ut alicubi etiam evadat $=0$, tum in negativam abeat, ac ſemper magis recedat a o creſcens ex parte negativa, tum iterum minuatur, & tranſeat per o abiens in poſitivam, idque per multas vices; cujuſmodi exempla nuſquam melius haberi poſſunt, quam in Geometria, ubi ſi curva quæpiam linea ſe pluribus flexibus contorqueat, ejus diſtantia a recta quavis tranſverſim ducta jam augetur, jam minuitur, jam evadit nulla, ubi nimirum ab illa recta ſecatur, vel tangitur, jam directionem mutat ad partem oppoſitam jacens. Idem autem & in algebraicis formulis videre eſt, in quibus ſi præter quantitates quaſdam conſtantes, & invariabiles, concipiatur una quæpiam, quæ perpetuo varietur, variatur perpetuo formulæ valor, & mutationes ſubit, quas jam conſiderabimus.

441. Sit quævis formula algebraica, ut $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2}$ &c. continens quantitatem x, quæ concipiatur perpetuo mutata, & quantitates quaſcunque a, b, c &c. quæ concipiantur coſtantes. Mutato valore x, qui concipiatur initio quidem negativus maximus tum perpetua additione decreſcat ex parte negativa, fiat o, tranſiens in poſitivum, ac deinde creſcat ex parte poſitiva in immenſum, formulæ illius valor perpetuo mutabitur. In ea mutatione leges hujuſmodi omnino obſervantur.

442. Primo quidem ſi valoris x mutatio ſit continua ſive fiat per omnes magnitudinis gradus ſine ſaltu, etiam mutatio valoris formulæ erit continua, & tranſibit ſine ſaltu per omnes magnitudinis gradus. Nimirum ſi ex bini valoribus x proveniant bini valores formulæ, ſemper valor quicunque intermedius inter illos binos valores formulæ ipſius orietur a quodam intermedio valore x. Si enim quantitatis x incrementum

con-

concipiatur minui ultra quoſcunque determinatos limites, cujuſcunque etiam ejus potentiæ, adeoque & cujusvis aggregati quotcumque potentiarum incrementum, vel decrementum minuetur pariter ultra quoſcumque limites); ac proinde illa creſcente incrementis non interruptis, creſcit hoc etiam eodem pacto.

443. Hinc ſi in mutatione continua valor formulæ abeat e poſitivo in negativum, vel viceverſa; id duplici tantum modo poterit contingere; nimirum vel tranſeundo per o; vel tranſeundo per infinitum, & poſitiva cum negativis nectuntur quodammodo in nihilo, & in infinito, ac imminuto vel aucto in infinitum valori poſitivo ſuccedit creſcens vel decreſcens per omnes magnitudinis gradus valor negativus; quotieſcumque ille in negativum convertitur, ac viceverſa. Sit formula $4-x$. Ea, exiſtente x poſitivo, & minore quam 4, erit poſitiva; creſcente autem x decreſcet, donec facto $x=4$, fiat $=0$, tum adhuc aucto x evadet negativa. At $\frac{8}{4-x}$, eſt pariter poſitivi valoris, donec $x<4$; ſed perpetuo creſcit, aucto x, ita, ut accedente x ad 4. ultra quoſcunque limites, creſcat contra ultra quoſcunque limites 8; nam exiſtente $x=2$, erit ejus valor $\frac{8}{2}=4$, exiſtente $x=3$, vel $=3.9$, vel $=3.99$, & ita porro, evadit $=\frac{8}{1}$, $\frac{8}{0.1}$, $\frac{8}{0.01}$ &c. ſive 8, 80, 800 &c. Facto $x=4$, evadit $=\frac{8}{0}$ valoris infiniti, tum aucto x mutatur in negativum; cum nimirum exiſtente $x=5$, jam ſit $=\frac{8}{-1}=-8$. In primo caſu abit valor poſitivus in negativum tranſeundo per o, in ſecundo tranſeundo per infinitum. Et quicumque valor formulæ utcumque parvus in primo caſu, vel utcumque magnus in ſecundo concipiatur, vel poſitivus, vel negativus; facile invenietur valor x minor, vel major quam 4, qui eum pariat.

444. In iis caſibus poſt appulſum ad o, vel ad infinitum, tranſcenditur, ac tranſcurritur is veluti limes interjacens inter poſitivas, & negativas magnitudines. At nonnunquam valor formulæ ab appulſu ad o, vel ad infinitum retro regreditur, ſive eo adveniat ex parte poſitiva, ſive ex parte negativa. Sit formula $16 - 8x + x^2$, nimirum quadratum binomii $4 - x$. Poſito x poſitivo minore quam 4 valor ejus formulæ erit poſitivus, qui decreſcet donec fiat $x = 4$, ibi evadet $= 0$, tum aucto x non mutabitur in negativum, ſed retro curſum ex parte poſitiva reflectet iterum poſitivus, & auctus. Facto enim $x = 2$, erit valor ejus formulæ $16 - 16 + 4 = 4$ facto $x = 3$, fiet $16 - 24 + 9 = 1$, facto $x = 3.9$, fiet $16 - 31.2 + 15.21 = 0.01$, facto $x = 4$. fiat $16 - 32 + 16 = 0$, facto $x = 4.1$, fiet $16 - 32.8 + 16.81 = 0.01$, facto $x = 5$, fiet $16 - 40 + 25 = 1$, & ita porro. Quod ſi ſit $\frac{8}{16 - 8x + x^2}$, exiſtente x minore, quam 4, erit valoris poſitivi, creſcente x creſcet ultra quoſcumque limites, facto $x = 4$, evadet valoris infiniti, tum aucto x, incipiet decreſcere, ſed ex parte poſitiva. Aſſumptis enim pro x valoribus 2, 3, 3.9, 4, 4.1. 5, 6, evadet $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{8}{0.01}$, $\frac{8}{0}$, $\frac{8}{0.01}$, $\frac{8}{4}$, ſive 2, 8, 800, infinitum, 800, 8, 2.

Eodem autem pacto formula $-x^2 + 8x - 16$ ſemper negativa accederet ad o, fieret $= 0$, facto $x = 4$, tum retro regrederetur ab ipſo appulſu ad o, & $\frac{8}{-x^2 + 8x - 16}$ ſemper valoris negativi abiret in infinitum, facto $x = 4$, tum ex infinito regrederetur pariter ex parte negativa.

445. Aliquando autem formulæ valor decreſcens incipiet iterum creſcere, aliquando vero creſcens antequam

quam in infinitum abeat, incipiet decreſcere, & in primo caſu habebit minimum quoddam ibi, ubi decrementum mutat in incrementum, in ſecundo maximum ibi, ubi mutat incrementum in decrementum. Sit formula $x^2 - 8x + 20$: ea ſi fiat x vel negativum valoris cujuslibet, vel poſitivum, ſemper erit valoris poſitivi. Sed dum x minor quam 4 augetur, decreſcet perpetuo, & fiet minima, facto $x = 4$, tum iterum creſcet. Eſt enim $= x^2 - 8x + 16 + 4$, & $x^2 - 8x + 16$ eſt quadratum valoris $x - 4$, vel $4 - x$, quod ſemper eſt poſitivi valoris, majus vel minus, prout x magis, vel minus diſtat a 4, ac facto $x = 4$, evadit $= 0$. Quamobrem etiam addito 4 illi quadrato, habebitur valor ſemper poſitivus, qui evadet minimus, ubi fiet $x = 4$, & illud quadratum $= 0$. Contra formula

$$\frac{8}{x^2 - 8x + 20}$$

erit quidem ſemper poſitivi valoris, at accedente x ad 4, creſcet, facto $x = 4$ evadet maxima, tum decreſceret. Quod ſi fuiſſet $- x^2 + 8x - 20$, vel

$$\frac{8}{- x^2 + 8x - 20},$$

valor in utroque caſu ſemper negativus aſſequeretur in primo minimum quiddam in ſecundo maximum facto $x = 4$.

446. Sæpe plures etiam habentur appulſus ad 0 cum tranſitu vel ſine ipſo, & plures regreſſus, ac mutationes incrementi in decrementum, vel viceverſa cum maximis, vel minimis valoribus, quæ quidem in formulis primi membri equationum ordinatarum facile perſpici poſſunt. In illis etiam in appulſu valoris x ad radicem quampiam fit tota formula $= 0$, ac niſi forte ibidem habeatur radicum æqualium numerus par, fit ſemper tranſitus per 0 a valore poſitivo ad negativum, vel viceverſa, ubi autem habetur numerus par radicum æqualium, fit regreſſus a 0 ſine tranſitu, ac inter binas

quaſ-

quaſvis radices reales inæquales, neceſſario habetur maximum quoddam; ac plerumque & minimum exhiberi a radicibus imaginariis; quæ ut paulo intimius perſpici poſſint, notanda ſunt prius quædam pertinentia ad ipſos valores ejuſmodi formularum.

447. In primis ſi æquatio ſit rite ordinata, & coefficientes finitos habeat, valor primi membri numquam poterit evadere infinitus exiſtente x valoris finiti; ſed vel erit $=0$, vel finitæ magitudinis. Nam in æquatione rite ordinata nullus terminus dividetur per incognitam illam; adeoque quivis terminus continet quantitatem cognitam finitam vel numquam, vel aliquot vicibus multiplicatam per valorem x, qui cum finitus ſit, erit finitus etiam quivis terminus; adeoque aggregatum quoque omnium finitum erit, niſi forte poſitivis, ac negativis terminis ſe mutuo deſtruentibus, evaneſcat, & fiat $=0$. Quamobrem ſi aſſumptis binis valoribus pro x, valor formulæ primi membri prodeat ex altero poſitivus, ex altero negativus; inter utrumque valorem aſſumptum pro x, continebitur realis aliqua radix æquationis, qua nimirum aſſumpta pro x, fiet formula ipſa $=0$. Nam e negativo in poſitivum valorem ea formula tranſire non poteſt, niſi tranſeat vel per 0, vel per infinitum (per num. 443). Non poteſt autem tranſire per infinitum. Tranſibit igitur per 0.

448. Si concipiatur valor x auctus in immenſum, terminus qui continebit potentiam ſuperiorem ipſius quamcumque, erit in immenſum major quovis termino; qui continebit inferiorem: contra eo in immenſum imminuto, erit in immenſum minor: & accipi poteſt valor x ita magnus, vel ita parvus, ut terminus ſuperiorem ipſius potentiam continens ad terminum continentem potentiam inferiorem habeat rationem utcumque magnam in primo caſu vel parvam in ſecundo; quicumque ſint coefficientes finiti ipſorum terminorum. Sit enim prior terminus ax^{m+n}, poſterior bx^{m}, ra-

tio

tio data 1 ad r. Erit $ax^{m+n} . bx^{m} :: x^{n} : \frac{b}{a}$, cum & productum extremorum, & productum mediorum ſit bx^{m+n}. Ponatur $t^{n} = r$, $c^{n} = \frac{b}{a}$, & ſumatur $x = \frac{c}{t}$, eritque $x^{n} = \frac{c^{n}}{t^{n}} = \frac{c^{n}}{r}$. Quare ratio x^{n} ad $\frac{b}{a}$, ſive x^{n} ad c^{n} erit eadem, ac $\frac{c^{n}}{r}$ ad c^{n}, ſive c^{n} ad $r c^{n}$, vel 1 ad r, quod ſuccedet, utcunque quantitas r ſit parva, vel magna, qua decreſcente, vel creſcente in immenſum decreſcet, vel creſcet t^{n}, adeoque contra creſcet, vel decreſcet $\frac{c}{t}$ ſive x.

449. Quamobrem ſi fuerint quotcumque termini continentes diverſas potentias incognitæ x cum coëfficientibus in ſe determinatis, nec infinitis, nec $= 0$, & mutato valore x, non mutatis; poterit aſſumi valor x ita magnus, ut terminus quivis ſuperiorem potentiam continens ſit in immenſum major ſumma omnium continentium potentias inferiores, vel ita parvus ut terminus quivis continens potentiam inferiorem ſit pariter in immenſum major ſumma omnium continentium potentias ſuperiores, ac in primo caſu adhuc aucto, in ſecundo imminuto valore x in immenſum, augebitur adhuc magis in immenſum illius termini ratio ad aggregatum omnium reliquorum. Si enim numerus terminorum ſit p, & ſit ratio quædam utcumque magna 1 ad q, fiat vero $r = pq$, poterit ſumi valor x ita magnus, vel ita parvus, ut terminus continens in primo caſu potentiam ſuperiorem x, in ſecundo inferiorem, habeat ad quemvis e reliquis rationem majorem, quam ſit 1 ad r (per num. 448.), ſive 1 ad pq. Quare diviſo illo termino in numerum partium æqualium p, quævis ex iis habebit ad quemvis e reliquis terminis ratio-

rationem majorem, quam ſit 1 ad q, adeoque & is totus terminus ad reliquorum omnium ſummam: ac patet ex ipſo num. 448, eam rationem adhuc in immenſum creſcere aucto in primo caſu valore x, imminuto in ſecundo.

450. Hinc ſi in primo membro æquationis cujuſvis ordinatæ ponatur pro x valor ſatis magnus negativus, valor ipſius primi membri erit negativus in æquationibus gradus imparis, poſitivus in æquationibus gradus paris; ac ſi ponatur valor poſitivus ſatis magnus: ſemper valor totius formulæ erit poſitivus. Nam primus terminus æquationis ordinatæ ſemper & ſignum poſitivum habet, & continet maximam potentiam x, eamque elevatam ad eum gradum, qui equationem denominat. Quare & id ſignum habet, quod illa incognitæ x poteſtas, & excedit reliquorum omnium ſummam; cumque negativarum quantitatum potentiæ impares negativæ ſint, pares vero poſitivæ, poſitivarum vero omnes poſitivæ; poſito pro x valore negativo, erit valoris negativi in æquationibus gradus imparis, poſitivi in equationibus gradus paris, poſito autem valore poſitivo, erit poſitivi in omnibus, adeoque idem & toti formulę accidet.

451. Inde autem conſequitur quamvis æquationem gradus imparis debere habere ſaltem unam radicem realem. Nam poſito ſatis magno valore negativo pro x, prodit valor totius formulæ negativus, poſito valore ſatis magno poſitivo, prodit poſitivus, adeoque (per num. 447) habebitur radix aliqua realis intermedia inter eos valores.

452. Tum vero eruitur illud, numerum radicum realium in æquatione gradus imparis debere eſſe imparem, in æquationibus gradus paris non poſſe eſſe niſi parem. Si enim cujuſpiam æquationis incognita ſit x, & radix quædam realis r, ac dividatur illa equatio per $x-r$, diviſio debebit eſſe accurata ſine ullo reſiduo, & quotus erit nova æquatio gradus unitate minoris, & continens reliquas omnes radices, quod quidem conſtat ex

ipſa

ipſa geneſi æquationum altiorum; quæ nimirum componuntur multiplicatione omnium æquationum primi gradus continentium radices ſingulas; juxta n. 235, accuratius autem demonſtratur dividendo æquationem generalem $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c. ... $+ px + q = 0$ per $x - r$. Proveniet enim ex ejuſmodi diviſione ſequens quotus poſt numerum operationum m,

$$\begin{array}{llll} x^{m-1} + rx^{m-2} & + r^2 x^{m-3} & \text{\&c.} & + r^{m-1} \quad = 0 \\ \phantom{x^{m-1}} + a & + ar & & + ar^{m-2} \\ & + b & & + br^{m-3} \\ & & & \text{\&c.} \\ & & & + p \end{array}$$

ac diligentius perpendenti ipſam diviſionis ſeriem ſatis patebit, poſtremum reſiduum fore $r^m + ar^{m-1} + br^{m-2}$ &c. ... $+ pr + q$, quod quidem erit $= 0$. Cum enim r ſit radix æquationis propoſitæ $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c. ... $+ px + q = 0$, poſito r pro x debet formula primi membri evadere $= 0$, nimirum illa ipſa $r^m + ar^{m-1} + br^{m-2}$ &c. ... $+ pr + q$, quæ pro reſiduo remanſerat, debet eſſe $= 0$. Hinc diviſa æquatione impari per æquationem ſimplicem, quæ contineat illam radicem realem, quam habet, orietur æquatio gradus paris continens reliquas; quæ ſi iterum habeat unam rudicem realem, diviſa per æquationem ſimplicem continentem ejuſmodi radicem reſtituet æquationem imparem, habentem neceſſario ſaltem unam radicem realem. Adeoque illa propoſita æquatio gradus imparis, quæ debet habere unam radicem realem, ſi habet & ſecundam, debet habere & tertiam; ac eodem argumento ſi habet quartam debet habere quintam; & ita porro; ac ſimul patet æquationem gradus paris, ſi habet radicem realem unam, debere habere & ſecundam, ſi habet tertiam, debere habere & quartam; ac ita porro; ac proinde æquationem quamvis gradus imparis debere habere numerum radicum rea-

lium

lium imparem, gradus vero paris non poſſe habere niſi parem.

453. Atque hinc demum fit manifeſtum illud, quod num. 219. propoſuimus, nimirum radicum imaginariarum numerum non poſſe eſſe niſi parem. Cum enim æquatio gradus imparis habeat radicum numerum imparem, paris parem, & realium radicum numerus in illis non poſſit eſſe niſi impar, in his par; radicum imaginariarum numerus reliquus non poterit eſſe niſi par in utriſque.

454. Concipiatur jam æquatio, quæ habeat omnes radices reales, & inæquales, in quibus valor formulæ tranſeat per o. Si ea ſit gradus imparis, poſito pro x valore negativo ſatis magno, valor formulæ erit pariter ſatis magnus & negativus, tum perpetuo decreſcet, donec in appulſu valoris ad primam radicem fiat $=$ o, & migret in poſitivum, qui deinde creſcet, tum alicubi neceſſario debebit mutare incrementa in decrementa, cum debeat redire ad o in appulſu ad ſecundam radicem, ubi migrabit iterum in negativum, ac creſcet ex parte negativa, tum decreſcet, ut in tertia radice fiat $=$ o, & ita porro, ac ſi æquatio ſit gradus paris valor initio poſitivus migrabit in negativum, tum in poſitivum, & ita porro.

455. Exemplum haberi poteſt in æquatione $x^5 - 7x^4 - 7x^3 + 79x^2 + 6x - 72 = 0$, cujus radices reales ſunt -3, -1, 1, 4, 6. In ea ſi ponatur pro x quivis numerus negativus major, quam -3, valor formulæ erit negativus poſito $x = -3$, ille valor fit $=$ o, tum tranſit in poſitivum ac poſito pro x valore -2.9, vel -2.5, vel -2, vel -1.5, vel quovis alio numero medio inter -3, & -1, ſemper idem valor eſt poſitivus, qui quidem prius creſcit, tum decreſcit, & facto $x = -1$ fit iterum $=$ o tum inter -1, & 1 eſt negativus, ab 1. ad 4 poſitivus a 4 ad 6 negativus, poſt 6 ſemper deinde poſitivus, quod Tyroni ſubſtituenti numeros facile patebit.

456.

456. Quod ſi binarum radicum valores ad ſe mutuo accedant, minuitur intervallum illud, in quo valor primi membri tranſiens per o in prima creſcit, tum decreſcit, & iterum appellit ad o in ſecunda; ac coeuntibus binis radicibus ita, ut jam æquatio habeat binas radices æquales, illud intervallum prorſus eliditur, & valor formulæ in appulſu ad binas radices reales non tranſit per o; ſed ab ipſo o regreditur. Sic ſi æquatio ſit $x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 53x^2 + 8x - 48 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$, adeoque habet radices -3, -1, 1, 4, 4, quarum binæ poſtremæ æquales ſunt, valor formulæ a valore $x = -3$ ad -1 erit poſitivus, a valore -1 ad 1 negativus, a -1 ad 4 poſitivus, tum in ipſo quidem $x = 4$, erit $= 0$, ſed poſtea iterum erit poſitivus, ut patebit ſubſtituenti.

457. At ſi ſumatur æquatio cujus radices -3, -1, 4, 4, 4, nimirum $x^5 - 8x^4 + 3x^3 + 92x^2 - 112x - 192 = 0$, compoſita ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$; in ipſa valor formulæ a -3 ad -1 erit poſitivus, a -1 ad 4 negativus, eliſo jam illo intervallo ab 1 ad 4, in quo iterum poſitivus erat, & poſt 4 erit poſitivus, adeoque in illa radice triplice 4 valor formulæ tranſibit per o, & mutabit ſignum. Verum ſi æquatio ſit potius $x^5 - 13x^4 + 48x^3 + 32x^2 - 512x + 768 = 0$; cujus radices -3, $+4$, $+4$, $+4$, $+4$, valor formulæ ante $x = -3$ negativus, a -3 ad 4 poſitivus eſſet, eliſo etiam illo intervallo a -1 ad 4 in quo negativus erat, ac poſt $x = 4$ pariter poſitivus, adeoque appellet quidem ad o, ſed non tranſibit; atque eodem pacto ſemper patebit in numero radicum æqualium impare haberi tranſitum, in pari regreſſum.

458. Binæ radices poſtquam æquales evaſerunt, poſ-

ſunt

ſunt abire in imaginarias cum nimirum valor formulæ, qui factis binis radicibus æqualibus; regrediebatur ab ipſo o, non pertingit ad o, ſed regreditur, ſive incipit iterum creſcere, ante quam deveniat ad ipſum o. Id patebit in æquatione $x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 56x^2 + 7x - 51 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x^2 - 8x + 17 = 0$, adeoque habet radices -3, -1, $+1$, $4 + \sqrt{-1}$, $4 - \sqrt{-1}$. In ea valor primi membri eſt negativus, ante quam fiat $x = -3$, a -3 ad -1 poſitivus, a -1 ad 1 negativus; qui deinde initio creſcit, tum decreſcit, & antequam fiat $= 0$ incipit iterum creſcere; ac creſcit deinde in infinitum, ut ſubſtituenti patebit.

459. Hinc vero quotieſcumque habetur minimum quoddam in valore formulæ primi membri ita, ut is a decreſcendo tranſeat ad creſcendum ante appulſum ad o, ſemper habebuntur binæ ſaltem radices imaginariæ. Aliquando tamen etiam illud intervallum inter valorem x, in quo formula primi membri incipit decreſcere, & valorem, in quo ſine appulſu ad o incipit iterum creſcere, eliditur, & æquatio binas radices imaginarias continet ſine minimo valore, ſive quin valor formulæ incipiat ibi prius decreſcere, tum creſcere. Id patebit in æquatione $x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 33x^2 + 8x - 30 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x^2 - 6x + 20 = 0$, adeoque habet radices -3, -1, 1, $2 + \sqrt{-1}$, $2 - \sqrt{-1}$. Ejus formula eſt negativa uſque ad $x = -3$, poſitiva ad -1, negativa ad 1, tum deinde ſemper poſitiva, ut pariter ſubſtituenti patebit.

460. Porro ipſi valores, in quibus formula tranſit a creſcendo ad decreſcendum, vel viceverſa, inveniri poſſunt, conſiderando incrementa, vel decrementa valorum formulæ orta ex perpetuo incremento valoris incognitæ, quod

quod ſummo erit uſui & ad æquationum naturam penitius cognoſcendam, ac inveniendas radices, & ad ſolvendas generaliter quæſtiones omnes *de maximis, & minimis*, quotieſcumque id, cujus quæritur maximum quoddam, vel minimum, algebraica formula exprimi poteſt.

461. Sit formula $x^m + ax^n + bx^r$ &c. ejus formæ, quam habet primum membrum æquationis ritè ordinatę, in qua concipiatur x creſcere per quantitatem quandam y. Omnes illi termini, qui continent x, mutabuntur, & ſi in ſingulis ponatur $x + y$ pro x, habebitur nova formula, ex qua ſi demàtur illa prior $x^m + ax^n + bx^r$ &c. habebitur incrementum, vel decrementum formulę ipſius ortum ex illo incremento y incognitę x, quod incrementum, vel decrementum generali vocabulo dicemus differentiam, ut ille valor y dicetur pariter differentia incognitæ x, quę nimirum differentiæ exhibent exceſſum, vel defectum ſecundi valoris incognitę $x + y$ reſpectu primi x, & formulæ ortę a ſecundo reſpectu ortę a primo.

462. Jam vero ſi quivis ex illis terminis formulę dicatur px^t, poſito $x + y$ pro x, habebitur in eo (per num. 91) $px^t + tpx^{t-1}y + \frac{t\times(t-1)}{1\times 2}px^{t-2}y^2 + \frac{t\times(t-1)\times(t-2)}{1\times 2\times 3}\times px^{t-3}y^3$ &c. Quare dempto px^t remanebit pro differentia illius termini formulę ipſius $tpx^{t-1}y + \frac{t\times(t-1)}{1\times 2}px^{t-2}y^2 + \frac{t\times(t-1)\times(t-2)}{1\times 2\times 3}\times px^{t-3}y^3$ &c.

463. Dicatur jam ſumma omnium terminorum tpx^{t-1} provenientium ex omnibus terminis propoſitæ formulæ $= P$, ſumma omnium $t \times (t-1) \times px^{t-2} = Q$, omnium $t \times (t-1) \times (t-2)\, px^{t-3} = R$, & ita porro, & hæc differentia formulæ erit $Py + \frac{Q\,y^2}{1 \times 2} + \frac{R\,y^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c.; ac valorum P; Q; R derivatio ex ipſa formula propoſita; ac ex ſe invicem ſtatim patet. Nam $t.px^{t-1}$ derivatur ex px^t, ducendo ipſum terminum in t, exponentem variabilis x, & dividendo per x, tum $t \times (t-1)\, px^{t-2}$, ex præcedenti $t\, px^{t-1}$ ducendo ipſum in $t-1$ exponentem ipſius variabilis x, & iterum dividendo per x, & pariter $t \times (t-1) \times (t-2)\, px^{t-3}$ derivatur ex præcedenti $t \times (t-1)\, px^{t-2}$, ducendo ipſum in $t-2$ exponentem variabilis x, & iterum dividendo per x. Ac eodem prorſus modo quivis hujuſmodi terminus ſequens derivatur ex præcedenti, ducendo ipſum in exponentem variabilis, & dividendo per ipſam variabilem.

464. Quamobrem ſi omnes termini formulæ propoſitæ ducantur in exponentem, quem variabilis x habet in eo termino & dividantur per x; formula, quæ inde orietur, & quam idcirco appellabimus primo derivatam, exhibebit illum valorem P. E formula P eadem prorſus lege derivabitur ſecundo formula Q, ex hoc tertio formula R, & ita porro, in qua derivatione terminus ille, qui in præcedenti formula carebat ipſa variabili, adeoque habebat variabilis exponentem 0, evaneſcet, ductus nimirum in ipſum 0, quo pacto decreſcet terminorum

horum numerus inter derivandum, ac continua illa diviſione per variabilem; factis tot derivationibus, quot exprimit exponens potentiæ altiſſimæ ipſius illius variabilis, in poſtrema deerit variabilis ipſa, ac nova formula derivata ex ea evadet $=0$.

465. Sit ex: gr: formula $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$, quæ dicatur A. Formula primo derivata erit juxta canonem numeri præcedentis $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192$; quæ erit $= P$: Formula ſecundo derivata erit $12x^2 - 96x + 176$, quæ erit $= Q$. Formula tertio derivata erit $24x - 96$, quæ erit $= R$. Formula quarto derivata erit 24; quæ erit $= S$, ex qua eadem lege derivaretur 0; cum nihil jam ſuperſit præter terminum 24, ſive $24x^0$, qui ductus in exponentem 0, evadit $= 0$. Porro ſi formula illa P primo derivata ducatur in y, ſecundo derivata Q in $\frac{y^2}{1\times2}$, tertio derivata R in $\frac{y^3}{1\times2\times3}$, quarto derivata S in $\frac{y^4}{1\times2\times3\times4}$, habebitur differentia formulæ propoſitæ A orta ex differentia y addita variabili x. Ac ſi Tyro in eadem formula ſubſtituet ubique $x + y$ pro x, tum alibi ipſi formulæ addet formulas illas derivatas, & eo pacto multiplicatas, ſive $Py + \frac{Qy^2}{1\times2} + \frac{Ry^3}{1\times2\times3} + \frac{Sy^4}{1\times2\times3\times4}$; inveniet utrobique eamdem prorſus ſummam.

466. Concipiatur jam quivis determinatus valor quantitatis x, cui addatur incrementum y, quod illo ſtante concipiatur imminutum in immenſum. Valores quidem P, Q, R &c., qui non pendent ab ipſo valore y, non mutabuntur, ac niſi forte ejuſmodi fuerit valor x, ut

formula P ſit $= 0$, omnes termini $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c., erunt in immenſum minores primo termino Py; (per num. 448) & tota formula $Py + \frac{Qy^2}{1 \times 2} + \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. habebit idem ſignum, quod primus ejus terminus Py, ac habebit valorem quamproximum valori ipſius, qui proinde prout fuerit conformis vel difformis valori formulę propoſitæ A, ipſa formula ex additione illa facta valori x ſuſcipiet incrementum, vel decrementum. Quod ſi forte fuerit $P = 0$, ſed non fuerit $Q = 0$, tum primo termino ſeriei illius evaneſcente, poſterioribus reſpectu ſecundi imminutis in immenſum, ſecundus $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$ exprimet quamproximè differentiam totius formulæ propoſitæ, prout fuerit valor Q poſitivus, vel negativus: Ac pariter ſi fuerit & $P = 0$, & $Q = 0$, ſed non $R = 0$, idem præſtabit tertius terminus $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$, & ita porro.

467. Hinc autem primo conſequitur illud, cujuſcunque magnitudinis aſſumatur x, dummodo non congruat cum valore radicis cujuſpiam æquationis ortæ ex formula primo derivata poſita $= 0$; ſive æquationis $P = 0$; imminuto y in immenſum, differentiam totius formulæ propoſitæ fore quamproxime, ut ipſum incrementum y, & habituram ad ipſum rationem finitam. Nam in eo caſu, poſito illo valore pro x, non verificabitur æquatio, ſive non erit $P = 0$, adeoque differentia formulæ propoſitæ erit quamproximè Py: nimirum ob P non mutatam mutata y, erit ut y, & erit ad y, ut P ad 1, cum ſit $P.1::Py.y$. Si autem aſſumatur pro x valor radicis æquationis $P = 0$, ſed non æquationis $Q = 0$, erit differentia formulę propoſitæ

quam-

quamproximè in duplicata ratione incrementi y, ac ſi is valor fuerit radicis communis æquationibus $P = 0$, & $Q = 0$, ſed non $R = 0$, erit illa quamproximè in ratione triplicata hujus; erit enim in illo caſu quamproxime $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$; in hoc, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$, ſive ob $\frac{Q}{1 \times 2}$ vel $\frac{R}{1 \times 2 \times 3}$ conſtantem variatâ ſolâ y, ut y^2, vel y^3 & ita porro.

468. Deinde eruitur illud, quotieſcumque formula propoſita devenit ad aliquod maximum, vel minimum, debere eſſe $P = 0$. Nam ubi formula ipſa devenit ad aliquod maximum, tranſit a creſcendo ad decreſcendum; ubi minimum aliquod aſſequitur, tranſit a decreſcendo ad creſcendum. Quare antequam deveniat ad maximum, utcunque parum ab eo diſtet, ſi y minuatur etiam infra illam diſtantiam, debet habere incrementum, tranſgreſſo maximo decrementum, contra vero ubi ad minimum devenit. Porro generaliter extra eos caſus, in quibus x habeat valorem cujuſpiam radicis æquationis $P = 0$, quorum caſuum numerus non poteſt eſſe major numero radicum ejus æquationis, ſitique determinato, formula propoſita ſemper habet incrementum, vel decrementum; prout P habet ſignum conforme, vel difforme ipſius ſigno. Igitur in ipſo appulſu formulæ, ad aliquod maximum, vel minimum, debet valor P tranſire e poſitivo in negativum, vel viceverſa, quod juxta num. 443, fieri non poteſt, niſi ibidem fiat $= 0$, cum ibi ex natura formulæ propoſitæ; quæ hic ponitur (per num. 461.) ejus formæ quam habet primum membrum æquationis ordinatæ, & ex natura derivationis expoſitæ num. 464, non poſſit tranſire per infinitum juxta num. 447.

469. Nomine autem minimi, hic intelligimus etiam illos caſus, in quibus, ubi decreſcendo appulerit ad o inde regreditur ex eadem parte, non vero illos, in quibus tranſgreditur ipſum valorem o, ac tranſit e poſitivo in negativum, vel viceverſa, cum ii tranſitus fiant

per detractionem continuam, vel per additionem; ac proinde decrementa ibi quodammodo non mutentur in incrementa, vel viceverſa, ſed veluti continuentur.

470. Hinc ſi alicubi formula propoſita devenit ad maximum aliquod, vel minimum, id detegi poteſt ponendo $P = 0$, ſive derivando ex ea æquationem hac lege, ut quivis terminus multiplicetur per exponentem variabilis x, & dividatur per x; ac formula derivata ponatur $= 0$. Nam inter radices ejus æquationis neceſſario continebuntur omnes illi valores, ad quos, ubi appulerit x, maximum aliquod habet vel minimum.

471. Proponatur numerus 8 ita ſecandus in binas partes, ut ſi a quarta potentia differentiæ inter partem alteram, & dimidium numerum, dematur octupla ſecunda potentia differentiæ inter partem alteram, & idem dimidium, reſiduum ſit maximum vel minimum. Sit pars altera x, erit altera $8 - x$. illius differentia a dimidio erit $x - 4$, hujus $8 - x - 4 = 4 - x$. Prioris quarta potentia $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$, poſterioris potentia ſecunda erit $16 - 8x + x^2$, adeoque ejus octuplum $128 - 64x + 8x^2$, quo ablato a priore habetur $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$ formula exprimens quantitatem propoſitam.

472. Ducantur ſinguli termini in ſuos exponentes quantitatis x, ac dividantur per x, ut prima derivatione numeri 465, & oritur æquatio $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 0$, ſive dividendo per 4, habetur $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, cujus radices 2, 4, 6, ut ſubſtituenti patebit. Porro ſi pro x aſſumatur quivis valor negativus, qui ſenſim minuatur, tum fiat 0, deinde ſummantur partes poſitivæ creſcentes adhuc tamen minores, quam 2, valor formulæ initio poſitivus perpetuo decreſcet tum tranſibit per 0 abiens in negativum creſcentem, donec evadat maximus, ubi pars $x = 2$, deinde decreſcet, donec facto $x = 4$, evadat $= 0$,

ne deinde creſcente x iterum recedat a o ex eadem parte negativa creſcens, donec fiat $x = 6$, ubi iterum fiet maximus, ac deinde decreſcet perpetuo, ac tranſgreſſo o abibit in poſitivum, & perpetuo creſcet, adeoque bina maxima habentur, facto $x = 2$, & $x = 6$, ac unum minimum facto $x = 4$, ubi ab ipſo o regreditur ex eadem parte, quod, ſi Tyroni libuerit, numeris ſubſtitutis, labore ſane improbo, omnino innoteſcet.

473. Et quidem ſi liberet illos etiam deprehendere valores x, in quibus propoſita formula tranſit per o, ſatis eſſet ipſam ponere = o, ac reſolvere æquationem inde ortam $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128 = 0$, quæ componitur ex hiſce binis $x^2 - 8x + 16 = 0$, $x^2 - 8x + 8 = 0$, ac proinde radices ſunt 4, 4, æquales, cum in iis formula regrediatur a o ſine tranſitu, poſterioris vero $4 \pm \surd 8$, ſive proxime 1 . 17, 6 . 83, in quibus fit ipſe tranſitus. Sed ea huc non pertinent.

474. Et hic quidem radices omnes æquationis derivatæ exhibuerunt maximum quoddam, vel minimum. At non ſemper omnes æquationis derivatę radices maximum quoddam, vel minimum exhibent. Mutato nonnihil problemate inveſtigetur maximum, vel minimum reſiduum, ubi ex illa quarta potentia auferatur illa eadem ſecunda potentia aſſumpta 16 vicibus, & octupla ſecunda potentia partis prioris. Ab $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$ auferendum erit $16x^2 - 128x + 256$, & $8x^2$, adeoque obveniet $x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 128x$. Aequatio inde derivata erit $4x^3 - 48x^2 + 144x - 128 = 0$, ſive $x^3 - 12x^2 + 36x - 32 = 0$, cujus radices 2, 2, 8. At priores binæ nec maximum quid exhibent, nec minimum. Nam valor formulæ, ſeu quantitatis propoſitæ, qui facta x negativa ſatis magna, tum decreſcente, & tran-

ſeunte in poſitivam, initio eſt poſitivus, & magnus, decreſcit, ac tranſgreſſus o, & factus negativus ante, quam fiat $x = 2$, pergit deinde creſcere ante & poſt appulſum ad 2, donec facto $x = 8$ fiet maximus ex parte negativa, nimirum -512, tum adhuc aucto x, & altera parte jam facta negativa, decreſcit, ac iterum tranſiens per o abit in poſitivum, & perpetuo creſcit.

475. Atque ex hoc, & pluribus aliis ejuſmodi exemplis patet, quandoque in errorem inducere methodum, quę pro inveniendis maximis, vel minimis, in hujuſmodi formulis plerumque preſcribi ſolet; qua nimirum præſcribitur ut ex ipſa formula derivetur equatio methodo expoſita, & æquationis radices aſſumantur pro maximorum, & minimorum determinatione, quod quidem etiam in differentiali calculo fieri ſolet, cujus methodus eodem redit. Preſcribi enim ſolet, ut quantitatis quæſitæ differentia infiniteſima quæ nimirum concipitur infinite parva, ponatur $=$o. Differentiam autem infinite parvam quantitatis cujuſvis deſignant prefixa characteriſtica d quantitati ipſi, adeoque ipſis eſt dx, quod hic nobis y, & contemnunt penitus infiniteſimas altiorum poteſtatum reſpectu inferiorum, adeoque contemptis penitus iis, quæ nos diximus $\frac{Qy^2}{1\times 2}$, $\frac{Ry^3}{1\times 2\times 3}$ &c. reſpectu Py, ſumunt pro differentia formulæ propoſitæ Pdx, & ea facta $=$o erunt æquationem illam noſtram eandem $P = $o.

476. At in eo hallucinantur plerique ex iis, qui rem paulo altius non perpendunt, quod admodum manifeſtum fit in ſuperiori exemplo, ubi, ut in aliis pleriſque, æquationis derivatæ radices nec maximum, nec minimum exhibent, ſaltem aliquæ, & licet nullum in ejuſmodi formulis haberi poſſit maximum, vel minimum, ut demonſtravimus quin id contineatur inter radices æquationis derivatę; adhuc tamen non ſemper e contrario omnes eę radices maximum exhibent, vel minimum; nec abs re

erit

erit erroris fontem aperire cum potiſſimum & generalem exhibere poſſimus canonem, ex quo innoteſcat, utrum æquationis derivatæ radix quæpiam maximum aliquid exhibeat, vel minimum, nec-ne; quin immo & illud quod ea methodus non docet, & plerumque omittitur, nimirum an habeatur potius maximum, an minimum, atque id ipſum ortum ex conſideratione generali æquationum, ac omnino connexum cum earum reſolutione per approximationem, quam hic perſequimur.

477. Illa autem regula inveniendi maxima, vel minima innititur huic diſcurſui. Dum quantitas creſcit, ejus differentia eſt poſitiva, dum decreſcit negativa. Quare ubi illa fit maxima, hæc evadit $= 0$. Porro contemptis omnibus terminis $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c.; ſive $\frac{Qdx^2}{1 \times 2}$, $\frac{Rdx^3}{1 \times 2 \times 3}$, reſpectu primi Py; ſive Pdx, ipſe ſolus terminus Py haberi poteſt pro differentia. Igitur ipſe ponendus eſt $= 0$, & in valoribus ex hac poſitione reſultantibus differentia erit ſemper $= 0$, adeoque habebitur aliquod maximum, vel minimum. In hoc diſcurſu committitur paralogiſmus in eo quod termini poſteriores contemnantur reſpectu termini, Py etiam quando ipſe eſt $= 0$. Ubi P non eſt $= 0$, debet eſſe quantitas in ſe determinata, reſpectu cujus cum y infinities minor concipiatur, omnes termini $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. ſunt infinities minores, & iis contemptis ſolus terminus Py conſiderari poteſt pro integra differentia; & quæ contemnuntur ſunt infinities minora iis, reſpectu quorum contemnuntur. At ubi fit

$P = o$, reliqui termini $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. non ſolum non ſunt infinities minores primo illo Py, ſed niſi forte ſit & $Q = o$, & $R = o$ &c., ſunt infinities majores, cum ipſi ſint aliquid, ac Py ſit $= o$, ac proinde poſito $Py = o$, non evadit $= o$ differentia ipſa, ſed remanet aliquid, & idcirco ex ea poſitione provenire poſſunt valores, qui nullum maximum, aut minimum exhibeant, ſed ubi adhuc quantitas propoſita pergat creſcere, vel decreſcere.

478. Et quidem ſi ſumatur quivis valor x determinatus, tum ei addatur differentia y, quæ concipiatur in immenſum exigua, nunquam differentia formulæ poterit eſſe $= o$; ſed ſi valor x ſit utcunque parum minor eo, qui exhibet maximum poſitivum, vel minimum negativum, erit poſitiva, ſi congruat cum illo, vel ſit utcunque parum major erit negativa, contra vero ubi exhibetur minimum poſitivum, vel maximum negativum. Semper enim inter illum valorem aſſumptum pro x, & illum qui exhibet maximum, vel minimum, infiniti alii intercedunt, quibus reſpondent valores formulæ majores, vel minores. Atque idem patet ex eo, quod ſi valor x utcumque determinetur, ac utcumque minuatur in immenſum y, valores P, Q, R &c. vel ſunt aliquid determinatum, & immenſum majus ipſo y, vel $= o$. Hinc primus ex iis qui non eſt $= o$, exhibet terminum in immenſum majorem poſterioribus omnibus, a quibus proinde elidi non poteſt, nec tota ſeries $Py + \frac{Qy^2}{1 \times 2} + \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. poteſt in eo caſu eſſe $= o$. At ſaltem poſtremum ex iis terminis non poteſt eſſe $= o$, nam in derivatione valorum P, Q, R &c. devenitur demum ad terminum prorſus carentem variabili x, qui nimirum oritur ex primo formulæ termino x^m poſt derivationes m juxta num. 464.

479. So-

479. Solum illud erui poteſt, ibi, ubi valor x eruitur ex poſitione $P = 0$, differentiam formulæ eſſe in immenſum minorem, quam alibi. Nam ubi non eſt $P = 0$, ipſa quamproxime eſt Py, & habet ad y rationem finitam, juxta num. 467, ubi autem eſt $P = 0$, niſi ſit & $Q = 0$, ipſa eſt quamproximè $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, vel ſi ſit & $Q = 0$, erit quamproximè $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ & ita porro, qui termini ſunt in immenſum minores termino Py non habente $P = 0$, quicunque in ſe determinati valores ſint P, Q, R &c. Quamobrem poſitio illa $P = 0$ non indicat locum, ubi differentia hoc modo conſiderata tranſeat a poſitiva, in negativam, vel viceverſa, & fiat $= 0$, ſed ſolum ubi in immenſum decreſcat. Porro ea revera nuſquam ſit $= 0$, cum nulla ſit quantitas x in ſe determinata ita proxima exhibenti maximum, vel minimum, ut alia propior non habeatur, adeoque, ut alia non habeatur, ipſa major, vel minor, ante quam incrementa mutentur in decrementa, vel viceverſa.

480. Alio pacto poteſt differentia conſiderari ita, ut evadat $= 0$, ſed adhuc poſitio illa $P = 0$ eum locum non determinat. Si nimirum concipiatur valor x perpetuo variatus, & y conſtans, dum x accedit ad valorem exhibentem maximum, vel minimum ita, ut ab eo minus diſtet, quam pro quantitate y, formula orta ex ſolo x, evadit alicubi æqualis formulæ ortæ ex $x + y$, ac tota ſeries exhibens differentiam formulæ nimirum $Py + \frac{Qy^2}{1 \times 2} + \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. evadit $= 0$. Sed is locus non eruitur poſito ſolum $Py = 0$. ſive $P = 0$. Eo enim caſu, valore x accedente in immenſum ad locum maximi

ximi, vel minimi, a quo ponitur diſtare minus, quam pro quantitate y, & in quo evadit $=$ o juxta numer. 470, ipſe valor P in immenſum decreſcit, & reliqui reſpectu ipſius non poſſunt contemni, nec ſi forte uſpiam tota ſeries eſt $=$ o, etiam ipſe eſt ibidem $=$ o. Poſita ſolum tota ſerie $=$ o, & habita y pro quantitate data, inveniretur æquatio, cujus radices exhiberent eos valores x in quibus differentia formulę orta ex additione illa y evaneſcit, qui valores plerumque exhiberentur eo propiores valori exhibenti maximum, vel minimum, quo ipſa quantitas y eſſet minor, vel major: ſed methodus eſſet ſatis implexa.

481. Ex hiſce omnibus evidenter patet caſus maximi, & minimi, non poſſe determinare equi ex ſuppoſitione differentię $=$ o, & contemptu altiorum poteſtatum quantitatis illius y adjectæ methodo communi, facta $P =$ o, ſed ſolum ope diſcurſus, quem inivimus num. 468, per illam poſitionem $P =$ o obtineri æquationem, cujus radicibus contineri debeat quodvis maximum, vel minimum, ſi ullum adſit. Quando autem id habeatur, quando verò non habeatur hoc pacto determinabimus ex conſideratione naturæ æquationum, de qua hic agimus.

482. In primis formula primi membri cujuſvis æquationis non poteſt habere plura maxima, & minima, quam exprimat exponens ejus gradus imminutus unitate, nimirum ſi fuerit gradus m, non poteſt habere plura, quam $m-1$. Nam dicatur ea formula primi membri ejus æquationis A, & æquatio $P =$ o primo derivata ex ipſa erit gradus unitate minoris ſive $m-1$ (per num. 464), adeoque non poterit continere radices plures, quam $m-1$ (per num. 237); cumque omnia maxima, vel minima valoris A iis radicibus contineri debeant (per num. 470), eorum numerus non poteſt eſſe major, quam $m-1$.

483. Quotieſcunque autem æquatio quæpiam habuerit omnes radices reales, inæquales, æquatio inde primo derivata habebit etiam ipſa omnes radices reales, &

ina-

inæquales, quarum ſingulæ exhibebunt ſingula maxima valoris A, & nulla ex iis congruet cum radicibus ejusdem. Nam inter binas quaſvis proximas radices inæquales æquationis $A = 0$ continentur ſingula maxima valoris A (per numer. 454). Quare habetur unum inter primam, & ſecundam, alterum inter ſecundam & tertiam, & ita porro; adeoque ſi radices ſunt m, habentur ſaltem ejuſmodi maxima $m-1$: immo, cum plura haberi non poſſint, erunt omnino $m-1$. Singula autem ex iis debent eſſe inter radices binas æquationis $A = 0$, quæ ponuntur omnes inæquales; ac proinde valores x in iis debent eſſe inter ſe inæquales, & diverſi a radicibus æquationis $A = 0$. Debent autem contineri inter radices æquationis $P = 0$ (per num. 470.). Illa igitur debet habere radicum realium, & inæqualium numerum $m-1$, cumque ſit gradus $m-1$, nullas alias radices habere poteſt nec reales, nec imaginarias præter illas.

484. Coeant jam binæ radices æquationis $A = 0$, & fiant æquales. Jam illud maximum, quod erat inter ipſas fit ibidem minimum, & $= 0$, juxta n. 469, nimirum in ipſo appulſu ad 0 valor formulæ A regreditur, ac proinde ille ipſe valor x debet haberi inter radices æquationis $P = 0$, cujus illa radix, quæ interjacebat inter binas congruentes æquationis $A = 0$, jam congruet cum illis, quæ ſi evadant imaginariæ juxta num. 458, illa radix æquationis $P = 0$, adhuc remanet realis, & formula A ibi habet minimum quoddam, donec fiat æqualis alteri ſibi proximæ, ac in imaginarias ambæ abeant, eliſo intervallo inter minimum illud, & maximum ſibi proximum juxta n. 459. Ac ſi aliæ binæ radices æquationis $A = 0$ adhuc coeant, patet eodem pacto alteram ex iis fore communem æquationi $P = 0$.

485. Inde deducitur, quotieſcumque æquatio $A = 0$ habebit radices binas tantum alicubi æquales, earum unam habituram æquationem quoque $P = 0$. Ac ſimili prorſus argumento ſi tres radices æquationis $A = 0$

coeant

coeant, binæ æquationis $P = 0$, quæ iis interjacebant congruent cum iis; & inter ſe: ac generaliter ſi æquatio $A = 0$ habuerit numerum radicum æqualium n, æquatio $P = 0$, habebit earumdem radicum numerum $n - 1$.

486. Quoniam autem eodem prorſus pacto derivatur formula Q ex P, quo P ex A, quarum radicum æquatio $P = 0$ habebit numerum $n - 1$, earundem $Q = 0$ habebit $n - 2$, & ita porro.

487. Inde autem, ſi innotuerit aliqua radix æquationis cujuſpiam, facile erit deprehendere, an ſolitaria ſit, an multiplex. Quivis terminus ipſius ducatur in ſuum exponentem valoris x, & dividatur per x, ac ſi poſito in formula ſic derivata eodem valore pro x, ea non evaneſcat; omnino illa radix ſolitaria erat, ſi evanuerit, illa erat ſaltem duplex, & quotuplex fuerit facile invenietur derivando eadem lege formulas e formulis donec deveniatur ad aliquam, quæ non evaneſcat. Quot enim derivationes factæ fuerint uſque ad formulam non evaneſcentem, tot radices ejuſmodi æquales habebit propoſita æquatio.

488. Æquationis $x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 53x^2 + 8x - 48 = 0$ eſt radix 1, quo valore poſito pro x, ejus primum membrum evaneſcit. Derivatur ex ea $5x^4 - 20x^3 - 27x^2 + 106x + 8$, in qua poſito 1 pro x habetur $+ 72$. Quare radix 1 eſt ibi ſolitaria. Ejus radix eſt etiam 4, quo valore poſito pro x in æquatione derivata, ea etiam evaneſcit. Sed derivando iterum novam habetur $20x^3 - 60x^2 - 54x + 106$, in qua poſito 4 pro x habetur 210. Igitur binas radices æquales 4 habet propoſita æquatio, & binas tantum. Et quidem num. 456 vidimus ejus radices eſſe $+ 3$, $- 1$, 1, 4, 4.

489. At in æquatione $x^5\ 13x^4 + 48x^3 - 32x^2 - 512x + 768 = 0$, cujus radices (per num. 457) ſunt

ſunt $= 3, + 4, + 4, + 4, + 4$, derivando ſequentes formulas alias ex aliis $5x^4 - 52x^3 + 144x^2 - 64x - 512$, $20x^3 - 156x^2 + 288x - 64$; $60x^2 - 312x + 288$; tam in ejus primo membro, quam in harum ſingulis poſito 4 pro x, habetur 0, at derivata alia ex hac poſtrema nimirum $120x - 312$, & poſito 4 pro x ea non evaneſcit, unde colligitur quatuor eſſe ejus radices æquales 4.

490. Hinc autem pro illis quæſtionibus de maximis, & minimis, de quibus ſupra egimus, eruitur hæc regula generalis. E formula propoſita derivetur alia formula lege toties expoſita, qua poſita $= 0$, inveniantur radices ejus æquationis. Quævis ex iis radicibus exhibebit maximum quoddam vel minimum, ſi ſolitaria fuerit, vel earum æqualium numerum imparem habuerit æquatio primo derivata. Sive, quod eodem redit, prima æquatione derivata deriventur ex ea eadem lege formulæ aliæ ex aliis, donec deveniatur ad aliquam, quæ poſita pro x radice aliqua ejusdem æquationis non evaneſcat. Si enim computato ipſo primo membro æquationis derivatæ numerus formularum evaneſcentium ex illa poſitione fuerit impar, ea radix exhibebit aliquod maximum, vel minimum; ſi par nullum maximum, vel minimum exhibebit.

491. Hujus canonis demonſtratio hinc petitur. Poſito pro x valore quovis utcumque parum remoto ab illo, in quo habetur maximum, vel minimum, (quo poſito formula P primo derivata evaneſceret, cum nimirum illa ſit radix æquationis $P = 0$) ipſum P non eſt $= 0$, adeoque eſt valoris cujuſdam in ſe determinati. Quare ſi aſſumatur y in immenſum exigua, valor Py erit in immenſum major ſequentibus omnibus $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c., & tota differentia formulæ erit poſitiva, vel negativa, prout ipſe valor P fuerit

poſi-

poſitivus, vel negativus. Si igitur valor P in appulſu x ad radicem quampiam æquationis $P = 0$, mutatur e poſitivo in negativum, vel e negativo in poſitivum, ac tranſit per 0, tota differentia formulę propoſitæ mutabit ibidem ſignum, adeoque incrementum mutabitur in decrementum, vel viceverſa, & habebitur aliquod maximum, vel minimum, ſecus ſi valor P regrediatur a 0, & maneat poſitivus, ut prius, vel negativus. Tranſibit autem valor P per 0, vel regredietur prout numerus earum radicum æqualium in æquatione $P = 0$ fuerit impar vel par juxta num. 446. Igitur habebitur maximum, aut minimum, vel non habebitur, prout numerus illarum radicum æqualium in æquatione $P = 0$ fuerit impar, vel par, quod prorſus congruit cum regula tradita.

492. An autem ibi habeatur maximum an minimum facilè deducitur ex valore illius formulæ, quæ inter perpetuo derivatas prima incipit non evaneſcere poſito in ea pro x valore radicis inventę æquationis $P = 0$. Si nimirum poſito pro x valore invento tam in formula propoſita, quam in illa primo non evaneſcente, valores utriuſque habuerint ſigna conformia, habebitur minimum, ſi difformia maximum. Quod ſi formula propoſita evaneſcat, ac fiat $= 0$, habebitur ſemper illud minimum, de quo egimus num. 469. Hujus etiam regulę demonſtratio eſt admodum explicata. Nam ubi eſt $P = 0$, ſed non $Q = 0$, differentia totius formulæ erit quamproximè $\frac{Q\,y^2}{1 \times 2}$, ac ejuſdem ſigni cum ipſo Q. Ubi & $Q = 0$, ſed non $R = 0$, erit quamproximè $\frac{R\,y^3}{1 \times 2 \times 3}$, & ejuſdem ſigni cum R, ac ita porrò. Adeoque accedente y ad x, accedet ad formulam propoſitam A quantitas ejuſdem ſigni cum illa formula, quæ prima non evaneſcit poſt derivationem. Porro ſi ipſi

ſi accedat quantitas ejuſdem ſigni, ea ibi incipit creſcere, & proinde devenerat ad quoddam minimum, ſi vero accedat quantitas ſigni contrarii, incipit decreſcere, adeoque devenerat ad maximum. Ubi autem rediditur a o, minimum quoddam habet in ipſo o. Patet igitur tradita regula.

493. Regularum exempla haberi poſſunt in formulis propoſitis num. 471, & 474. Prior, quæ hic dicetur A, fuerat $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$. Formula P inde derivata num. 472, erat $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192$, qua poſita $= 0$ habitæ ſunt æquationis provenientis radices 2, 4, 6, quarum nulla cum ſociam habeat ſibi æqualem, patet jam inde ſingulas ex iis exhibere aliquod maximum, vel minimum. Si autem ſingulæ tantum erutæ fuiſſent, adhuc idem pateret; nam derivando iterum haberetur formula $Q = 12x^2 - 96x + 176$, quæ nulla ex iis radicibus poſita pro x evaneſcit. Ac proinde cum unica formula derivata evaneſcat in ſingulis radicibus ſingulæ exhibent maximum aliquod vel minimum. Porro poſito 2 pro x in ipſa formula propoſita, ea evadit $= -16$, eodem poſito in formula Q habetur 32. Signa difformia ſunt, adeoque maximum exhibent, quod ibi habetur facto $x = 2$. Poſito vero 4 pro x, A evaneſcit, adeoque ibi habetur minimum in ipſo o. Poſito demum 6, in A habetur -16, in Q habetur 32. Signa iterum difformia iterum exhibent maximum.

494. Poſterior formula poſita num. 474, quæ hic erit A, erat $x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 128x$. Formula P inde derivata erat $4x^3 - 48x^2 + 144x - 128$, qua poſita $= 0$, habitæ ſunt æquationis provenientis radices 2, 2, 8, quarum prima cum duplex ſit, jam inde eruitur, ea nec maximum aliquod exhiberi, nec minimum: contra infertur radicem ſolitariam 8 exhi-

bere alterum ex iis: ac ſi ſingulæ radices eruta fuiſſent, innotuiſſet idem derivando ex P formulam $Q = 12x^2 - 96x + 144$, in qua cum poſito 2 pro x habeatur 0; at iterum ex Q derivando $R = 24x - 96$, & pariter ponendo 2 pro x; formula non evaneſcat, ſed fiat -48, binæ evaneſcentiæ oſtendunt, nullum adeſſe maximum aut minimum. At cum in $Q = 12x^2 - 96x + 144$ poſito 8 pro x, formula non evaneſcat, ſed evadat 144; exhibetur ibi maximum, vel minimum, ubi unicam nimirum evaneſcentiam. Cum verò poſito 8 in ipſa formula A habeatur -512, at in formula Q, quæ prima non evaneſcit, habeatur 144; ſigna difformia maximum exhibent.

495. Quod ſi formula eſſet $x^5 - 10x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 25x - 2$, quę hic erit A; æquatio $P = 0$ erit $5x^4 - 40x^3 + 90x^2 - 80x + 25 = 0$ ſive $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5 = 0$; cujus radices 1, 1, 1, 5, & quidem derivata inde $Q = 20x^3 - 120x^2 + 180x - 80$, & $R = 60x^2 - 240x + 180$, ac $S = 120x$, -240 & poſito 1 pro x evaneſcit & P, & Q, & R non autem S, poſito verò 5 evaneſcit ſola P, adeoque evaneſcentiæ numero impari docent utroque valore maximum aliquod exhiberi, vel minimum. Cumque poſito 1 pro x in A habeatur 4, in S habeatur -228, ſigna difformia oſtendunt maximum, & cum poſito 5 pro x in A habeatur -252, in Q vero 180, ſigna pariter difformia indicant maximum.

496. Atque hoc quidem pacto in formulis omnibus ejus formæ, quam habet primum membrum æquationis rite ordinatę ſemper admodum facile inveniantur maxima & minima. Pro aliis, in quibus diviſores adſunt continentes variabilem quantitatem, vel radicales termini, res adhuc facile procedit, ſed requiritur methodus

eorum

eorum terminorum differentias eruendi, de qua potius agemus ibi, ubi infinitesimalis calculi primam partem, quam differentialem dicunt; exponemus. Hæc abunde ſunt hoc loco occaſione conſiderandi variationes, quas ſubit primum æquationis membrum, ex diverſis ſubſtitutionibus; ut & finiti calculi vis appareat; & ad infiniteſimalem ſternatur via; & errorum quorumdam communium origo pateat; ac vitetur periculum.

497. Interea, quod ad primum pertinet cujuſvis æquationis membrum; illud ex dictis patet, quo ſequenti §. utemur ad radices eruendas: nimirum, poſitis pro x diverſis valoribus; diverſos admodum prodire valores primi membri, eoſque jam creſcere, jam minui: at ſi differentiæ valorum poſitorum pro x ſint ſatis exiguæ, differentias valorum totius formulæ generaliter, extra paucos caſus maximorum illorum, vel minimorum fore proxime proportionales differentiis valoris x, eoque propiores huic proportioni; quo illæ minores extiterint. Atque id quidem ſemper contingere prope radices ſolitarias; prope autem eas radices, quarum plures æquales ſunt; differentias fore in ratione admodum diverſa: nimirum differentias a valore o; qui habetur in ipſis radicibus, ſive valores totos formularum fore in duplicata differentiarum valoris aſſumpti pro x a vero radicis valore; ubi radices binæ æquales fuerint; in triplicata ubi tres; & ita porro; quæ omnia ex ſupra demonſtratis ſatis patent, & uſui futura ſunt.

§. XV.

De reſolutione æquationum omnium, ubi de regula falſæ poſitionis.

948. UBi binæ quantitates inter ſe ita connexæ ſunt, ut prima facile determinetur per ſecundam, ſecunda multo difficilius per primam, ſi quæratur valor ſecundæ reſpondens dato cuipiam valori primæ; adhiberi ſolet methodus falſæ poſitionis, ponendo nimirum va-

rios valores pro ſecunda aſſumptos ad arbitrium, & determinando valores primæ ex iis reſultantes, inter quos ſi inveniatur valor datus, quod raro admodum continget caſu mere fortuito, valor poſitus pro ſecunda quantitate erit valor verus, ſed cum plerumque valor quantitatis primæ proveniat diverſus a dato, idcirco valor ille poſitus pro ſecunda quantitate eſt valor falſus. Verum ab uno, vel pluribus ejuſmodi valoribus per falſas illas poſitiones inventis inveniri poteſt plerumque, qui valor pro ſecunda quantitate poni debeat, ut valor primæ congruat cum vero, & methodus, quæ docet uſum valorum ex falſis illis poſitionibus provenientium ad inveniendos valores veros dicitur regula falſæ poſitionis.

499. Quotieſcumque prima quantitas eſt accurate in ratione ſecundæ, vel directa, vel indirecta, problema ſolvitur per unicam falſam poſitionem. Sit valor datus primæ quantitatis m, valor quæſitus ſecundæ ipſi reſpondens x, poſito autem pro hac ſecunda a, obveniat valor primæ p. Fiat in primo caſu $p.m::a.x$, in ſecunda $m.p::a.x$, & innoteſcet quæſitus valor x, ut patet. Exhibebimus exemplum primi caſus tantummodo, ex quo & ſecundus facile innoteſcet.

500. Debeat ſumma 1295 aureorum ita dividi in partes tres ut ſecunda ſit dupla primæ, tertia dupla ſecundæ. Data ſumma dividenda, non ita facile ſtatim innoteſcunt partes, at contra data prima parte, admodum facile innoteſceret ſumma, ejus enim duplum exhibet ſecundam, hujus duplum tertiam, & habitis partibus habetur ſumma. Pars autem prima, & ſumma directe proportionales ſunt. In eadem enim ratione augentur vel minuuntur partes reliquæ, ac ſumma, in qua augetur ipſa pars prima. Summa igitur, & pars prima ſunt illæ binæ quantitates ita inter ſe connexæ, ut ſi data prima, quæratur ſecunda, per ſimplicem regulam falſæ poſitionis innoteſcat. Ponatur partem primam eſſe aureorum 5 erit ſecunda 10, tertia 20, adeoque ſumma 35. Fiat igitur ut 35 ad datam ſumma 1295, ita ille numerus

inerus falſo poſitus 5, ad quæſitum, & habebitur $\frac{5 \times 1295}{35}$ $= 185$. Et quidem ſi prima pars ſit 185, erit ſecunda 370, tertia 740; ſumma erit 1295 nimirum numerus ille datus.

501. Si pro prima parte poſitus fuiſſet unus aureus; ſola diviſione res facilius confecta fuiſſet, haberetur enim pars ſecunda 2, tertia 4, ſumma 7, & factis ut 7 ad 1, ita 1295 ad quartum, prodiiſſet 185 ſola diviſione numeri dati 1295 per 7. Per denominationem autem algebraicam ſine falſa poſitione, res eodem prorſus modo conficeretur. Facta enim parte prima x ſecunda fuiſſet $2x$, tertia $4x$, ſumma $7x$; qua poſita $= 1295$, eſſet $x = \frac{1295}{7} = 185$.

502. Quod ſi earum quantitatum altera eſſet in aliqua ratione multiplicata vel ſubmultiplicata alterius, eodem pacto liceret progredi: ſed pro valore primæ quantitatis invento per falſam poſitionem, & dato, adhibendæ eſſent illæ poteſtates, vel radices eorum, quæ datæ illi proportioni reſpondeant. Concipiamus vim magnetis cujuſdam trahentis eſſe in ratione reciproca triplicata diſtantiarum adeoque diſtantias in ratione reciproca ſubtriplicata virium, & quæratur in qua diſtantia ejus vis trahens datam maſſam æquivalere debeat unciis 64. Facile erit aſſumpta quavis diſtantia experiundo invenire vim. Inveniatur in diſtantia palmorum 6 vis unciarum 8. Fiat ut $\sqrt[3]{64}$, ad $\sqrt[3]{8}$, ſive ut 4 ad 2, ita diſtantia data 6 ad quæſitam 3; in qua nimirum habebitur vis illa unciarum 64; ut patet.

503. At ſi e binis illis quantitatibus non ſit altera in ratione directa alterius, vel ſimplici, vel utcumque multiplicata, ſit autem incrementum, vel decrementum unius in ratione incrementi, vel decrementi alterius, ſive differentiæ illius, ut differentia hujus, problema per dupli-

tem falſam poſitionem ſolvitur immediate. Bini valores poſiti pro ſecunda quantitate ſint a, b, quæſitus x, valores primæ provenientes e poſitionibus ſint p, q, valor datus reſpondens x ſit m. Fiat ut $q-p$ ad $m-p$, ita $b-a$ ad valorem quemdam r, qui additus valori a exhibebit quæſitum valorem x. Erit enim ob differentias proportionales $q-p.m-p::b-a.x-a$, & ob rationem initam, $q-p.m-p::b-a.r$. Quare cum in utraque proportione priores tres termini ſint iidem, erit & $x-a=r$, $x=a+r$.

504. Quærantur bini numeri, quorum detur ſumma 12, & differentia 4. Aſſumpto primo ad arbitrium & addito 4, habetur ſumma, quæ ſi congruat cum 12, inventus eſt valor quæſitus. Sin minus, aſſumpto ſecundo valore pro primo numero, & iterum addito 4, habetur ſecundus, & ſumma, quæ tamen non erit ad priorem, ut hic poſterior valor aſſumptus ad illum priorem, ob illud 4 utrique additum. Incrementa enim vel decrementa ſummarum proportionalia erunt ſemper incrementis, vel decrementis partium aſſumptarum; cum nimirum numerus ille conſtans 4 adjectus incrementa ipſa, ac decrementa non turbet. Solvetur igitur Problema per duplicem falſam poſitionem. Ponatur pro primo numero 1, ſecundus erit 5, ſumma 6, quæ diſtat a 12. Ponatur pro eodem 3, ſecundus erit 7, ſumma 10, quæ adhuc diſtat a 12. Erit hic $a=1$, $b=3$, $p=6$, $q=10$, $m=12$. Fiet igitur $10-6.12-6::3-1.r=\frac{2\times6}{4}=\frac{12}{4}=3$. Quare quæſitus numerus $x=1+3=4$. Et quidem alter erit $4+4=8$, adeoque ſumma 12: & numerorum 4, ac 8 ſumma eſt 12, differentia 4, ut oportebat.

505. Quod ſi computetur ſolus error, quo conditio proveniens ab aſſumpto valore diſtat a conditione propoſita, paulo ſimplicior evadet ſolutio. Poſito enim primo errore p, ſecundo q, quæretur error nullus, adeoque m erit $=0$, & proportio $q-p.0-p::b-a.r$,

quantitatem addendam valori aſſumpto a, ſive ut $q - p$ ad p ita $b - a$ ad quantitatem demendam. Sic in caſu propoſito ſumma 6 inventa in prima poſitione 1 diſtabat a ſumma propoſita 12 per 6, in ſecunda poſitione 3 ſumma 10 diſtabat per 2. Erit igitur $2 - 6 . 6 :: 3 - 1$. $\frac{2\times 6}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$, quo numero ablato ab 1 habetur 1 $+ 3 = 4$, ut prius.

506. Atque hoc pacto licebit tentare ſolutionem problematum etiam, in quibus non innoteſcat, an differentiæ ſint accurate proportionales, ac nonnunquam res ſuccedet. Sint binæ nummorum ſummæ ejuſmodi, ut ſi e prima majore bini transferantur in ſecundam, evadant æquales: ſi contra bini e ſecunda transferantur in primam, hæc evadat illius dupla. Aſſumatur pro ſumma minore 4, in quam ſi transferatur 2 fiet 6, cui æqualis jam erit ſumma major, quam igitur oportuit eſſe 8. At e minore translato in hanc 2, illa fiet 2, hæc 10, quæ per ſecundam conditionem debuit eſſe 4. Igitur propoſita poſitio 4 diſtat a conditione propoſita per 6. Aſſumpto pro prima ſumma 6, oportet eodem diſcurſu ſecunda ſit 10, ut nimirum translato 2 hinc illuc, evadant pares. Translato autem 2 ex 6 in 10, illa fit 4, hæc 12, quæ per ſecundam conditionem debuit eſſe 8, errore exiſtente 4. Erit igitur hic $p = 6$, $q = 4$, $a = 4$, $b = 6$, adeoque $4 - 6 . 6 :: 6 - 4$. $\frac{2\times 6}{-2} = \frac{24}{-2} = -6$, & proinde valor quæſitus primæ ſummæ $a - r = 4 + 6 = 10$. Et quidem poſito 10 pro minore ſumma, major debet eſſe 14, ut translato inde huc 2, fiant ambæ 12. Translato autem 2 e ſumma 10 in ſummam 14, erit illa 8, hæc 16 illius dupla, ut oportebat.

507. Hi caſus reducuntur multo facilius per poſitiones algebraicas, & ſemper exhibent æquationem primi gradus. Primus caſus ſolvitur ut num. 501. Poſito nimirum numero majore x, minore y, erit $x + y = 12$, $x - y$

 $= 4$,

$= 4$, adeoque $x = 12 - y$, & $= 4 + y$, quare $12 - y = 4 + y$, $12 - 4 = 2y$; $8 = 2y$; $\frac{8}{2} = y = 4.$, & $x = 12 - 4 = 8$. Secundus ſolvitur poſita ſumma majore x, minore y; habetur enim $x - 2 = y + 2$, & $x + 2 = 2 \times (y - 2) = 2y - 4$. Ex prima $x = y + 4$, ex ſecunda $x = 2y - 6$. Quare $2y - 6 = y + 4$; & $y - 6 = 4$, $y = 10$, ac $x = 10 + 4 = 14$.

508. Et quidem ſi formula determinans alteram quantitatem per alteram, contineat unicum terminum habentem alteram; ſemper erit locus falſæ poſitioni unicæ, ſi præterea contineat terminum conſtantem, & ab illius mutatione non pendentem, locus erit poſitioni duplici. Si enim poſita ſecunda quantitate x, formula fuerit $\frac{mx}{n}$ mutato x, mutabitur $\frac{mx}{n}$ in ratione eadem. Quod ſi formula fuerit $\frac{mx}{n} + p$, tum quidem ipſa non erit ut x, ſed ejus differentia erit, ut differentia x, cum mutata ipſa x, non mutetur p, quod conſtat etiam ex §. ſuperiore, num. 465. Poſita enim y pro differentia x, formula derivata ex $\frac{mx}{n} + p$ erit $\frac{my}{n}$, quæ ob m, n conſtantes, erit ut y. At ſi formula contineat etiam x^2; & ſit $px^2 + qx + r$, ejus differentia erit per eumdem numerum $2pxy + \frac{q}{1 \times 2}$, quæ proinde non erit ut y, ob terminum q conſtantem. Quare unica ſimplex falſa poſitio ſolum adhiberi poteſt, ubi eſſe debet $\frac{mx}{n}$ æquale

quan-

quantitati datæ, vel nihilo, duplex, ubi $\frac{mx}{n} + p$, nimirum ubi æquatio primum gradum non excedit.

509. In reliquis caſibus, in quibus nec quantitas prima ſecundæ proportionalis eſt, nec illius differentia differentiæ hujus, adhuc plerumque cum ſucceſſu adhibetur duplicis falſæ poſitionis regula, ſi jam valores poſiti a vero valore quæſito parum admodum diſtent. Ut enim ſuperiore §. vidimus num. 467, omnium formularum utcumque ad altiſſimas æquationes rite ordinatas pertinentium differentiæ exiguæ ſunt quam proxime, ut differentiæ x generaliter, extra paucos illos determinatos caſus, in quibus x accedit ad radices æquationis primo derivatæ ex ipſa formula, quibus caſibus etiam omnia maxima, ac minima ejuſdem formulæ continentur. Ac idem pariter in reliquis omnibus formulis unicam variabilem quantitatem continentibus locum habet, ut nimirum generaliter aucta, vel imminuta variabili illa quantitate per differentias ſatis exiguas, differentiæ quoque totius formulæ iiſdem illis differentiis proportionales ſint, præter caſus quoſdam, in quibus differentia formulæ infinities magis decreſcit vel creſcit, quam alibi, ac vel tranſit e poſitiva in negativam, & maximum quoddam, aut minimum exhibet, vel ex eadem nihili, aut infiniti parte retro regreditur.

510. Hinc in omni tabularum genere hac fere methodo utimur, ut in Aſtronomia, in Trigonometria, ac in logarithmorum tabulis. Computati ſunt ex. gr. logarithmi pro numeris integris: logarithmi pro numeris continentibus fractiones quoque præter numeros integros inveniuntur ex hac ſuppoſitione, quod differentiæ logarithmorum exiguæ differentiis numerorum ſint proportionales ſaltem proxime, & inventis in tabula logarithmis numeri proxime majoris, & proxime minoris dato, per regulam cum hac prorſus duplici falſa poſitione congruentem logarithmus numeri propoſiti invenitur parte 1. hujus tomi, Arithm. c. 3. num. 35.

511.

511. In iis autem caſibus, in quibus ex ſecunda quantitate aſſumpta ad arbitrium poteſt inveniri prima, ſed earum differentiæ non ſunt inter ſe proportionales, ſi data prima quæratur ſecunda ipſi reſpondens, adhibita regula duplicis falſæ poſitionis, generaliter extra caſus illos anomalos adhuc magis ad quæſitum valorem acceditur, dummodo poſitiones non ſint inter ſe nimis remotæ, & aſſumpta jam nova hac poſitione, ac calculo reſtituto, licet ad valorem ipſum quæſitum accedere in infinitum.

512. Jam vero in quavis formula primi membri æquationis cujuſvis incognitæ quæritur valor x ejuſmodi, ut formula tota ſiat $= 0$, ac poſito quovis valore pro x admodum facile eruitur valor formulæ, ſed contra dato quovis valore formulæ admodum difficulter, ſive nullo artificio adhuc cognito, definiri poteſt valor x. Igitur ad inveniendum valorem x vero proximum quantum libet, adhiberi poterit methodus duplicis falſæ poſitionis, dummodo jam ad verum valorem x, ſive radicis quæſitæ ſatis proxime deventum fuerit, & prope eam radicem differentiæ exiguæ ipſius formulæ ſint proxime proportionales differentiis valoris ipſius x. Id autem per n. 467, & 485 ſuperioris §. ſemper continget extra caſus, in quibus æquatio plures radices æquales habeat. Quare in ejuſmodi caſibus tradita methodo licebit uti, & ſi primus valor poſitus pro x dicatur a, ſecundus b, primus valor formulæ p, ſecundus q, ac fiat $q - p . p :: b - a . r$, erit valor x vero propior $= a - r$ juxta num. 505. At primum oſtendendum erit, quo pacto ſatis accedi poſſit ad valorem radicis, & diſcerni, an ibi plures habeantur radices æquales, an unica, ſive an ibi exiguæ differentiæ formulæ differentiis x proxime proportionales ſint, an ſecus.

513. Porro generalis methodus, qua ad radices certo accedatur nulla adhuc, quod ſciamus inventa eſt: at plures falſas poſitiones inſtituendo, ac adhibendo binas quaſque paulo aliter ac ſuperius, fere ſemper intentum obtinebitur demum, ac omnino ſemper, vel ad radicem realem ſolitariam devenietur, vel ad plures reales æquales,

vel

vel incidetur in binas ſaltem radices imaginarias. Ubi vero incident radices reales ſolitariæ, ſatis cito deinde accedetur ad eas multo magis methodo ſuperiore: ubi plures æquales obvenerint, lentius quidem, adhuc tamen in infinitum, ſi libeat, accedetur ad eas hac methodo, quam hic tradituri ſumus, eas nimirum includendo limitibus quibuſdam, & limites ipſos arctando ſemper magis.

514. Poſitis binis valoribus pro x, obvenient bini valores formulæ. Si ipſi habuerint ſigna contraria, exiſtente altero poſitivo altero negativo, neceſſario inter binos valores poſitos continebitur radix aliqua realis æquationis juxta num. 447. Ponatur pro x valor medius arithmetice proportionalis inter binos poſitos, & obveniet valor formulæ, cujus ſignum congruet neceſſario cum ſigno alterius e valoribus primo inventis, & opponetur alteri. Aſſumatur iterum valor x medius arithmetice inter valorem poſtremo loco aſſumptum, & illum e præcedentibus, qui valorem formulæ exhibuit habentem ſignum contrarium ſigno valoris exhibiti ab eodem. Tum eadem methodo ſemper aſſumatur valor medius inter poſtremo aſſumptum, & præcedentem, ex qua valor formulæ profluxit oppoſitus, ac binorum quidem valorum x differentia ſemper duplo minor fiet, & inter eos ſemper radix quædam continebitur, ad quam ipſi accedent ſemper magis, cum ſemper magis accedant ad ſe invicem. Cavendum tamen dum valores aſſumpti pro x adhuc ſatis inter ſe diſtant in aſſumendis mediis arithmetice proportionalibus contemnendas eſſe decimalium fractiones inferiores, quæ calculum implicatiorem redderent ſine fructu.

515. Facilioris calculi gratia aſſumemus æquationem gradus tertii carentem ſecundo termino $x^3 - 30x + 36 = 0$, methodus autem eſt eadem pro æquationibus omnibus. Tota formula $x^3 - 30x + 36$ dicatur A, & poſito $x = 3$ erit $A = -27$, poſito $x = 7$; erit $A = 169$. Cum igitur obvenerint pro A ſigna contraria, habetur

omni-

omnino aliqua radix intermedia; ad quam accedetur calculo inito juxta ſequentem tabellam continentem ſex cellulas.

x :	A	x :	A	x :	A
1		2		3	
3 :	−27	3 :	−27	4 :	−20
5 :	11	4 :	−20	4.5 :	−7.875
7 :	169	5 :	11	5 :	11
4		5		6	
4.5 :	−7.875	4.7 :	−1.177	4.7 :	−1.177
4.7 :	−1.177	4.8 :	2.592	4.75 :	0.671875
5 :	11	5 :	11	4.8 :	2.592

In prima habentur bini valores 3, & 7 primo poſiti pro x, ex quibus obvenerunt bini valores $A-27$, & 169 oppoſiti, ac in medio 5 medius arithmeticus inter illos, ex quo provenit $A=11$, habens ſignum oppoſitum ſigno valoris -27 provenientis ex poſitione $x=3$. Hinc in ſecunda cellula valores x, 3, & 5 medium arithmeticum 4 ſecum habent, cujus valor A, -20 eſt contrarius valori 11 orti ex poſitione 5. Idcirco in tertia ponitur 4.5 valor x medius arithmeticus inter 4, & 5. Eodem pacto in quarta ponendus erat valor 4.75 medius inter 4.5, & 5. Sed contempta illa fractione centeſima 5, poſitus fuit 4.7, & in quinta pro 4.85 poſitus fuit 4.8. Liceret autem eodem pacto progredi, & ſemper radix illa intra arctiores limites concluderetur.

516. Porro cum æquatio propoſita $x^3-30x+36=0$ componatur e binis $x+6=0$, $x^2-6x+6=0$; habet radices -6, $3-\sqrt{3}$, $3+\sqrt{3}$, atque hæc poſtrema eſt $3+1.73205080756$. Patet igitur, radicem 4.75 ab ipſa jam diſtare minus, quam 18 milleſimis partibus unitatis, ſive minus quam $\frac{1}{271}$ parte radicis ipſius, poſſe au-

tem lente quidem, ſed tamen omnino tuto deveniri ad diſtantiam utcumque exiguam.

517. Conſiderando autem valores *A* ſatis patebit eorum differentias multum initio diſtare a ratione differentiarum valorum *x*, ac ad eam deinde ſatis accedere. Nam ſi in ſuperiore tabella in quavis poſitione ſubtrahatur primus valor tam *x*, quam *A* a ſecundo, ſecundus a tertio, differentiæ valorum *x* in prima poſitione erunt 2, ac 2 æquales, differentiæ vero valorum *A* erunt 38, 158 adeo inæquales, & inæqualitas multo etiam major potuiſſet obvenire, ſi poſitiones primæ fuiſſent remotiores a vero valore. At in poſtrema poſitione differentiæ *x* erunt 0. 05, 0. 05 pariter æquales, differentiæ vero valorum *A* erunt 1. 848875, 1. 920 125, quæ ab æqualitate vix diſtant $\frac{1}{25}$ ſui parte. Quamobrem hic jam uti licebit regula duplicis falſæ poſitionis expoſita num. 503, qua multo citius ad verum valorem accedetur.

518. Sed in adhibenda duplici falſa poſitione, ne calculus fractionum plus æquo excreſcat ſine fructu, ſatis erit in valoribus *A* retinere e fractionibus decimalibus, unam, aut alteram ultra eum limitem, intra quem præcedentium trium poſitionum differentiæ erant inter ſe proportionales, qui limes, ubi valorum *x* differentiæ ſunt æquales inter ſe facile primo intuitu perſpicitur, ut hic, ubi exiſtentibus differentiis *x* in poſtrema poſitione æqualibus, differentiæ valorum *A* erant inter ſe fere æquales in prioribus binis notis 1. 8, 1. 9; generaliter vero deprehendi poteſt factis, ut prior e differentiis *x* ad poſteriorem, ita prior e differentiis *A* ad valorem, qui collatus cum poſteriore differentia valorum *A* exhibebit limitem quæſitum, nimirum eum, uſque ad quem ii bini valores inter ſe collati congruent. Sed jam exemplis illuſtrabitur methodus. In reſtituendo vero calculo, ubi ſubſtituto valore novo *x* invenitur valor novus *A*, ſatis erit aſſumere priores binas ejus notas poſt cyphras o;

nam

nam ipſe ejus valor obveniſſet omnino $=0$, ſi differentiæ fuiſſent proportionales inter ſe.

§ 519. Sumptis pro x valoribus 4. 7, & 4. 75, qui juxta num. 503 erunt a, & b, proveniunt pro A valores -1.18, 0.67, qui erunt p, & q. Erit autem A ille valor datus m, qui nimirum debet oriri ex nova poſitione $=0$. Quare cum in hoc caſu fieri debeat juxta num. 505. $q-p \,.\, b-a :: p \,.\, r$, & ſumi pro x valor $a-r$; erit ut 1. 85 ad 0. 05, ita -1.18 ad -0.0318, adeoque $x=4.7+0.0318=4.7318$ qui valor a vero radicis valore 4. 73205 &c. invento num. 516 minus differt quam per $\frac{3}{10000}$. Reſtituendo autem calculo poſito hoc valore pro x in primo æquationis membro, nimirum $x^3-30x+36$, habetur $A=-0.0093$. E prioribus autem ſeligendo valorem poſitum pro x huic propiorem 4. 75, ex quo obvenerat $A=0.67$, erit jam $a=4.7318$, $b=4.75$, $p=-0.0093$, $q=0.67$, adeoque erit, ut 0. 6793 ad 0. 0182, ita -0.0093 ad $-0.0002492=r$, adeoque $x=4.7318+0.0002492=4.7320492$, qui ad verum valorem 4. 7320508 &c. jam multo propius accedit, cum ab eo differat minus quam per $\frac{2}{1000000}$. Eademque methodo liceret progredi in infinitum, & multo citius, quam priore methodo ad verum radicis valorem accederetur.

§ 520. Atque hoc quidem pacto, ſatis liquet, in quavis æquatione impari gradus cujuſvis ſemper inveniri poſſe valorem unius ſaltem radicis realis vero utcumque proximum. Aſſumpto enim pro x valore poſitivo ſatis magno, in iis obveniet valor A poſitivus, aſſumpto valore negativo obveniet negativus. Quin immo, quoniam poſito pro x valore 0, relinquitur pro A valor ultimi termini, evaneſcentibus reliquis omnibus, ſi is ſit poſitivus, ponendus erit pro x valor negativus, ac au-

augendus ſemper donec evadat valor A negativus, ſi vero idem valor poſtremi termini negativus fuerit, ponendus erit pro x valor poſitivus, augendúſque donec valor A poſitivus fiat; quod omnino continget. In æquatione $x^3 - 30x + 36 = 0$, propoſita num. 515. poſito $x = 0$, fit $A = 36$. Ponatur $x = -5$, & erit $A = 61$ valoris adhuc poſitivi. Sed aucto x, & facto $= -10$, habetur $A = -664$, cum ſigno oppoſito; unde conſtat realem aliquam radicem haberi inter -5, & -10, & quidem per num. 516 habetur -6.

521. Hactenus diximus quo pacto ad verum radicis realis valorem liceat accedere, ubi e binis poſitionibus factis pro x obveniunt bini valores A cum ſignis contrariis. Quod ſi eorum valorum ſigna evaſerint conformia, ponatur pro x valor tertius arithmetice proportionalis poſt binos præcedentes incipiendo ab eo, qui exhibuit valorem A majorem, ſi valores priores fuerint inæquales, vel ſi fuerint æquales, incipiendo ab utrolibet, ac ſi trium valorum A medius non fuerit altero extremorum minor, altero non major, ponatur iterum pro x valor tertius arithmetice proportionalis poſt ſecundum, & tertium e præcedentibus tribus, atque ita perpetuo aſſumantur novi valores pro x, donec demum vel novus valor A ſit $= 0$, vel idem habeat ſignum contrarium ſignis priorum, vel medius trium valorum A ſit altero extremorum minor altero non major. Id autem neceſſario continget: nam adjecta valori x perpetuo, vel perpetuo ablata quantitate quadam conſtanti, nimirum illo præcedentium valorum intervallo, valor A ex dem. in ſuperiori §. debet ita mutari, ut demum in infinitum excreſcat, ac interea vel appellet ad 0, congruente valore poſito pro x cum radice aliqua, ac tranſibit per ipſum 0, vel inde regredietur, prout ibi fuerit radicum cum eo valore congruentium numerus impar, vel par, vel etiam ante appulſum ad 0 retro curſum reflectet. Quamobrem ſi priores valores fuerint inæquales, ac tertius obvenerit utroque minor (nam ſi obvenerit ſecundo

lo æqualis, vel major, jam ſecundus ipſe erit priore illo minor, tertio hoc novo vel æqualis, vel minor, adeoque non major), iteratis poſitionibus debebit demum creſcere, & præcedentes valores ſuperare, ac interea poterit & fieri $=$ o, & tranſire, ac mutare ſignum.

522. Quod ſi deveniatur ad valorem $A=$ o, jam habebitur una æquationis radix realis, ſi deveniatur ad ſignum valoris A contrarium, invenietur radix ſuperiore methodo, ſi deveniatur ad ejuſmodi tres valores A, quorum medius altero extremorum ſit minor, altero non major, inter extremos e tribus valoribus poſitis pro x habebuntur ſemper vel binæ ſaltem radices reales, vel binæ imaginariæ. Dum enim valor A pergendo ab extremo majore ad medium decreſcit, tum ad alterum extremum ejuſdem valoris eſt, vel iterum major; id fieri non poteſt niſi alicubi decrementa deſinant, & mutentur in incrementa, ac interea valor ille poteſt vel ſaltem bis tranſire per o, exhibendo binas radices reales inæquales, vel regredi ante appulſum ad o, & habere aliquod minimum, quod (per num. 458.) ſecum trahit binas ſaltem radices imaginarias.

523. Porro in caſu, in quo medius trium valorum A ſit altero extremorum minor, altero non major, valor extremus A, qui medio eſt major dicatur p, medius q, alter extremus ipſi q æqualis, vel eo major r, valores autem poſiti pro x, ex quibus ii orti ſunt; dicantur a, b, c, ac aſſumatur pro x valor $\frac{a+b}{2}$ medius arithmetice proportionalis inter a, & b, & ſi novus valor A obvenerit minor, vel æqualis valori q, jam binæ illæ radices reales vel imaginariæ jacebunt inter a, & b, erit enim is valor A minor p, & non major q; ſi vero obvenerit major ipſo q, aſſumatur pro x valor $\frac{b+c}{2}$ medius arithmetice inter b, & c, & ſi is exhibuerit valorem A non minorem valore q, jam valor q erit præceden-

cedente minor, hoc novo non major, adeoque inter $\frac{a+b}{2}$, & $\frac{b+c}{2}$ jacebunt radices illæ, ſi vero exhibuerit valorem *A* minorem valore *q*, exhibebit profecto minorem etiam valore *r*, æquali vel majore *q*, adeoque jam hic novus valor *A* erit utroque extremorum minor, & radices illæ erunt inter *b*, ac $\frac{b+c}{2}$, In quovis autem ex iis tribus caſibus, limites radicum illarum duplo arctiores fiunt, ut patet. Quare reſtituto in infinitum calculo, poſſunt arctiores reddi in infinitum.

524. Et quidem ſi valor *A* alicubi intra eos limites tranſit per o, & radices exhibet reales, ac inæquales, neceſſario devenietur hac methodo ad binas ſaltem earum radicum; nam ubi diſtantia valoris *x* novi a præcedenti evaſerit minor, quam ſit diſtantia radicum illarum inæqualium, medius novus ipſe valor *x*, vel incidet in ipſum radicis alterius valorem, vel verſabitur inter illas, & valorem *A* exhibebit habentem ſignum oppoſitum, ſigno præcedentium. Si vero valor *A* appellit ad o, & inde regreditur, & ſecum trahit numerum radicum æqualium parem, nuſquam quidem mutabitur ſignum valoris *A* in novis poſitionibus; adhuc tamen ipſe valor decreſcet in infinitum, & fiet in immenſum minor, quam ſit diſtantia ipſorum valorum *x*. Nam ibi in ipſo o valor *A* habebit minimum quoddam, & differentiæ reliquorum valorum a minimo illo erunt ipſi reliqui valores toti, differentia autem valorum *x* a valore radicis exhibente $A=o$, erit minor, quam diſtantia valorum, quibus ipſe includitur, & (per n. 479.) differentiæ valorum *A* reſpectu differentiarum valorum *x* ibi in infinitum decreſcent. Si demum valor *A* ante appulſum ad o regreditur, & minimum aliquod habet, ac radices imaginarias denotat, incipient quidem differentiæ valorum *A* fieri in immenſum minores differentiis valorum *x*, & interea totus valor *A* diſtabit a o

ita, ut ſtatim manifeſto apparere debeat, minimum ejus valorem diſtare ab ipſo o; ac poſſit ad ipſum illum valorem minimum accedi quantum libet.

525. Infinitum eſſet exemplis illuſtrare ſingula ex iis, quæ diximus: illuſtrabimus præcipua capita. In eadem ſuperiore æquatione propoſita num. 515, nimirum $x^3 - 30x + 36 = 0$, poſito $x = 0$ fit $A = 36$, poſito $x = 5$ fit $A = 11$, qui valores habent ſigna conformia. Ponatur pro x valor 10 tertius poſt 0, qui exhibuit valorem $A = 36$ majorem, & 5, qui exhibuit 11 minorem. Habebitur $A = 736$; & trium valorum A, 36, 11, 736 medius 11 eſt priore minor, ſecundo non major, cum ſit pariter minor. Quare inter 0, & 10 habentur vel binæ ſaltem radices reales inæquales, vel binæ æquales, vel binæ imaginariæ. Et quidem habentur binæ reales, nimirum $3 - \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$, ut eodem num. 156 oſtendimus.

526. Dicatur jam $a = 10$, $b = 5$, $c = 0$, eritque $p = 736$, $q = 11$, $r = 36$. Poſito pro x valore $\frac{a+b}{2} = 7.5$, habetur $A = 232.875$, qui valor eſt major valore medio $q = 11$. Quare ponendus $x = \frac{b+c}{2} = 2.5$, eritque $A = -23.375$, unde ob ſignum contrarium ſignis prioribus jam conſtat haberi ſaltem binas radices reales inæquales, alteram inter 5, & 2.5, alteram inter 2.5, & 0, & quidem $3 + \sqrt{3}$ eſt $= 4.73$ &c., & $3 - \sqrt{3} = 1.26$ &c.

527. Quod ſi æquatio ſit $x^3 - 27x + 54 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x - 3 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 6 = 0$, & ponatur $x = 15$, erit $A = 3024$. poſito $x = 10$ fit $A = 784$ valoris itidem poſitivi quare aſſumpto pro x valore 5 tertio poſt 15, & 10, habetur $A = 44$, valoris adhuc poſitivi, & medius ille valor A 784 minor

minor eſt quidem extremo 3624, ſed major extremo 44. Quare aſſumendus eſt pro x valor o tertius poſt 10, & 5, & fit $A = 54$ valoris quidem poſitivi; ſed ita, ut trium valorum 784, 44, 54 medius utroque extremo ſit minor. Hinc inter valores 10, & o habentur ſaltem binæ radices vel reales inæquales, vel reales æquales, vel imaginariæ; & quidem habentur binæ reales æquales 3, 3.

528. Sint $a = 10$, $b = 5$, $c = 0$; $p = 784$, $q = 44$, $r = 54$, & poſito pro x $\frac{a+b}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$, fit $A = 273.375$, valoris poſitivi, & minor quidem valore $p = 784$, major tamen valore $q = 44$. Quare poſito $x = \frac{b+c}{2} = 2.5$, fit $A = 2.125$; qui valor eſt minor tam valore $q = 44$, quam $r = 54$: unde colligitur illas radices contineri inter 5, & o limites jam duplo propiores. Erunt igitur jam $a = 5$, $b = 2.5$, $c = 0$, $p = 44$, $q = 2.125$, $r = 54$. Poſito $x = \frac{a+b}{2} = 3.75$, vel, omiſſa poſtrema nota, 3.7 habetur $A = 4.753$, qui quidem valor eſt major medio illo $q = 2.125$. Quare ponendum $x = \frac{b+c}{2} = 1.25$, vel 1.2, unde fit $A = 23.328$, qui valor pariter eſt major medio illo $q = 2.125$. Quare illæ binæ radices verſantur inter limites hoſce novos duplo arctiores 3.7, 1.2. Eodem autem pacto factis $a = 3.7$, $b = 2.5$, $c = 1.2$, $p = 4.753$, $q = 2.125$, $r = 23.328$, ponendum erit $x = \frac{a+b}{2} = 3.1$, unde oritur $A = 0.091$, qui valor cum ſit minor tam valore $p = 4.753$, quam valore $q = 2.125$, conſtat jam illas radices contineri inter 3.7, & 2.5, ac novi valores a, b, c eſſent 3.7, 3.1, 2.5, novi p, q, r,

eſſent 4. 753, 0, 091, 2. 125, quorum ope progredi liceret ad limites adhuc arctiores.

529. Porro ob ipſum valorem *A* uſque adeo imminutum ſatis jam tuto licet conjectari ipſum convergere ad 0, & numerum radicum æqualium parem hic contineri, quas etiam cum conſtet non niſi binas eſſe poſſe, cum æquatio gradus tertii plures quam tres habere radices non poſſit, multo etiam citius ad eas licebit accedere ex eo, quod valores *A* debeant eſſe (per n. 497) in duplicata ratione diſtantiarum valorum *x* a valore radicis, adeoque ipſæ diſtantiæ valorum *x* in ratione ſubduplicata valorum *A*. Nimirum oportebit dividere intervallum valorum 3. 7, 2. 5, ſive 1, 2 in ratione ſubduplicata 4. 752, 2. 125, ſive in ratione 4. 753, 3. 161, ac prior terminus ſubtrahendus erit a 3. 7. Factis autem ut 4. 753 + 3. 161 = 7. 914 ad 4 753 ita 1. 2 ad quartum, prodit 0. 721, adeoque novus valor $x = 3. 7 - 0. 721 = 2. 979$, qui valor illo 3. 1 ad verum valorem *x*, nimirum 3, adhuc multo magis convergit. Si vero haberentur radices æquales quatuor, adhibere oporteret rationem ſubquadruplicatam, ſi 6 ſubſextuplicatam &c., & inde fere etiam diſcerni poſſet an radices æquales ſint binæ, an 4, an 6 &c., videndo, an definito novo valore radicis ope rationis ſubduplicatæ, an ope ſubquadruplicatæ, &c., novus valor *A* obveniat minor, ſive propior vero valori 0, quod ipſum accidit etiam in iis caſibus, in quibus habentur ſigna valorum *A* oppoſita, in quibus nimirum ſi fuerint tres radices æquales, vel 5, vel 7, adhiberi debet ratio ſubtriplicata, ſubquintuplicata, ſubſeptuplicata, pro methodo adhibita n. 519, & ſeqq.

530. Quod ſi æquatio fuerit $x^3 - 16x + 120 = 0$, quæ componitur ex binis $x + 6 = 0$, $x^2 - 6x + 20 = 0$, adeoque habeat radicem realem -6, & binas imaginarias $3 + (\surd - 11)$, $3 - (\surd 11)$, poſito $x = 2$ habetur $A = 96$, poſito eodem $= 6$ habetur $A = 240$. Quare aſſumpto tertio arithmetico poſt 6, & 2, ſive

—2,

-2, habetur $A=144$, adeoque valor medius 96 eſt minor utroque extremo; & inter 6 ac -2 æquatio habet vel binas radices reales inæquales, vel binas reales æquales, vel exiſtentibus binis imaginariis valor A recto regreditur, & minimum quoddam habet. Et quidem habet minimum, ubi $x=\sqrt{\frac{16}{3}}$ ſive $4\sqrt{\frac{1}{3}}$. Nam æquatio inde primo derivata methodo numeri 464 eſt $3x^2-16=0$, ſive $x^2-\frac{16}{3}=0$, $x^2=\frac{16}{3}$, $x=\pm\sqrt{\frac{16}{3}}$, quæ quidem radices cum inæquales ſint earum utralibet exhibetur vel maximum aliquod vel minimum (per num. 490). Si autem derivetur ſecundo formula $6x$ ex formula $3x^2-16$ primo derivata, & ſubſtituatur $-\sqrt{\frac{16}{3}}$ pro x tam in formula propoſita $x^3-16x+120$, quam in formula $6x$, obveniunt valores $-\frac{16}{3}\sqrt{\frac{16}{3}}+16\sqrt{\frac{16}{3}}+120=\frac{32}{3}\sqrt{\frac{16}{3}}+120$, & $-6\sqrt{\frac{16}{3}}$ cum ſignis difformibus; at poſito $\sqrt{\frac{16}{3}}$, obveniunt $\frac{16}{3}\sqrt{\frac{16}{3}}-16\sqrt{\frac{16}{3}}+120=-\frac{32}{3}\sqrt{\frac{16}{3}}+120=-24.6336$ &c. $+120=95.3664$ &c.; & $6\sqrt{\frac{16}{3}}$ cum ſignis conformibus; adeoque priore illo exhibetur maximum (per num. 492.) hoc poſteriore minimum.

531. Porro jam valores a, b, c erunt 6. 2, -2; valores p, q, r erunt 240, 96, 144; & aſſumpto $\frac{a+b}{2}=4$, habetur A 120, qui valor cum ſit minor quidem, extremo $p=240$, ſed major medio $q=96$, aſ-

ſumi debet $\frac{b+c}{2}=0$, unde pariter profluit $A=120$, qui valor cum ſit pariter major illo valore $q=96$, ita ut e tribus valoribus A 120, 96, 120, medius extremorum utroque ſit minor; jacebunt illæ binæ radices, vel minimus valor A habetur inter limites 4, 0, duplo arctiores, & novi valores a, b, c erunt 4, 2, 0, novi p, q, r erunt 120, 96, 120, aſſumptoque $\frac{a+b}{2}=3$ oritur $A=99$, major valore $p=96$, poſita vero $\frac{b+c}{2}=1$, oritur $A=105$ pariter major medio $q=96$. Quare jam erunt eædem radices, vel valor minimus erit inter valores 1, & 3, atque eodem pacto liceret a valorem illum 2. 82 &c., in quo habetur illud minimum accedere quantum libet; ſed cum jam differentiæ valorum fiant ſatis exiguæ, valor autem ipſe ſit ſatis magnus, tres enim poſtremi valores A ſunt 99, 96, 105, ſatis tuto licet conjicere poſteriores differentias totum valorem A non eliſuras, adeoque non reales, ſed imaginarias radices contineri hiſce limitibus, quod ulterius pergenti multo evidentius fieret manifeſtum.

532. Atque hoc quidem pacto ſatis liquet, in quavis æquatione omnino ſemper deveniri ad unam radicem realem, vel ad binas reales inæquales, vel ad binas reales æquales, vel ad minimum exhibens radices imaginarias. Et quidem ubi omnes radices ſint reales invenientur ſemper hac methodo radices omnes. Inventa enim quamproximè una reali, quæ dicatur f, & diviſa æquatione per $x-f$, diviſio debebit ſuccedere quamproximè, ita ut poſtremum reſiduum ſit quam libuerit exiguum, æquatio vero ex diviſione proveniens continebit omnes illas reliquas radices reales, ac proinde in hac pariter invenire licebit ſaltem unam radicem realem,

lem,

lem, nimirum prioris alteram, & ita porro, donec omnes inventæ ſint.

533. Verum plerumque diverſis poſitionibus adhibitis in prima ipſa æquatione propoſita detegentur omnes tranſitus a ſigno poſitivo ad negativum circa omnes radices; quod omnino ſemper continget, ſi binæ radices non fuerint ſatis proxime inter ſe, & e conſideratione valorum *A*, Analyſta exercitatus loca ipſa tranſituum facilè ſubodorabit. Idem erit ſubterfugium, ubi æquatio habeat radices imaginarias mixtas realibus, & in eas impingat methodus tradita. Mutatis enim poſitionibus fere ſemper invenientur ejuſmodi valores *A*, ex quibus liceat conjicere loca, in quibus mutantur ſigna, vel in quibus in ipſo appulſu ad o devenitur ad minimum quoddam.

534. Ubi ſuperiore methodo ad aliquam radicem ſatis proximè deventum fuerit, calculus ob decimalium fractionum numerum, plus æquo moleſtus accidet potiſſimum in altioribus æquationibus habentibus plures terminos, & acceſſus ad verum valorem eſt ſemper admodum lentus. Habetur autem methodus admodum expedita, qua, invento ſemel valore non nimis remoto, citiſſimè ad maximè proximum devenitur, ac plerumque, ubi nimirum altioris gradus æquationes anteriorum terminorum coefficientes non habeant plus æquo ingentes, ſatis erit, ſi valor inventus a vero non diſtet magis, quam decima ſui parte, & ubi coefficientes illi multo majores ſint, methodus aliquanto minus converget, niſi aliquanto propior vero aſſumatur valor. Methodus autem innititur iis, quæ num. 466 demonſtravimus, de contemptu terminorum ſuperiores potentias continentium quantitatum exiguarum, reſpectu terminorum continentium inferiores, atque eſt hujuſmodi.

535. Valor proximus vero inventus dicatur a, valor verus x ſit $a + z$, eritque z quantitas exigua reſpectu a. Subſtituantur pro x, x^2, x^3 &c. valores ſui, & æquatio transformabitur in aliam continentem quantitatem, z ele-

z elevatam ad eamdem maximam potentiam, ad quam fuerat elevata incognita x, adeoque ejuſdem gradus cum præcedenti: Sed in ea omiſſis omnibus terminis, qui continent potentias ſuperiores quantitatis z præter primam, reducetur ad æquationem gradus primi exhibentem valorem z vero proximum, quo addito valori a, & reſtituto calculo, vocando a novum valorem radicis inventum, z novam adhuc minorem differentiam a vera radice, fiet acceſſus in infinitum: Quod ſi relinquantur etiam termini continentes z^2; habebitur æquatio gradus ſecundi reſolvenda adhuc admodum facile, & valor z erit multo propior vero. Termini autem, qui retineri debent, admodum facile deprehenduntur ex formula generali binomii elevati ad quamvis potentiam: Si enim terminus fuerit hx^m, pro eo ſatis erit ponere in prima methodo $ha^m + mha^{m-1}z$, in ſecunda

$$ha^m + mha^{m-1}z + \frac{m\times(m-1)}{1\times 2}a^{m-2}z^2:$$

536. Æquationis $x^3 - 30x + 36 = 0$, cujus radix (per num. 516) 4. 7320508075 6 &c.; in tertia cellula numeri 515 invenimus radicem 4. 5 mediam inter 4, & 5, adeoque jam conſtabat, ibi eam a vera abludere minus, quam in ratione 0. 5 ad 4, vel 5; ſive decima circiter vel minus etiam quam decima ſui parte. $a + z$ ponatur pro x dicendo $a = 4.5$, & habebitur in prima methodo

$$\begin{aligned} a^3 &+ 3a^2 z = 0 \\ -30a &- 30z \\ +36 & \end{aligned}$$

adeoque $z = \dfrac{a^3 - 30a + 36}{-3a^2 + 30}$, ſive ponendo 4. 5 pro a, habetur $z = \dfrac{-7.875}{-30.75} = 0.25$. Quare fit $x = 4.$

5 + 0.

$5+0.25=4.75$, quæ jam a vera differt $\frac{2}{100}$. At iterum facto $a=4.75$ & reſtituto calculo haberetur $z=\frac{0.671875}{-37.6875}=-0.01782$, adeoque $x=4.75-0.01782=4.73218$, qui valor a vero 4.7320 differt per $\frac{2}{10000}$, atque ita porro continua calculi reſtitutione multo citius ad verum valorem convergitur, quam ſuperioribus methodis.

537. Quod ſi libeat etiam ſecundam potentiam z retinere, facta ſubſtitutione habebitur

$$\begin{array}{lll} a^3 & +3a^2 z & +3az^2 \\ -30a & -30z & \\ +36 & & \end{array} = 0;$$

Adeoque $z^2+\frac{a^2-10}{a}z+\frac{a^3-30a+36}{3a}=0$: Quare $z=\frac{-a^2+10}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2-10}{2a}\right)^2-\frac{a^3-30a+36}{3a}}$, ubi poſito primo quidem 4.5 pro a, habetur $z=-1.139\pm1.371$, nimirum aſſumpto ſigno poſitivo $z=0.232$, adeoque $x=4.5+0.232=4.732$, qui valor a vero 4.73205 &c. nonniſi in quinta decimalium nota differt. Reſtituto autem calculo, & poſito 4.73 pro a, fit $z=-1.30791754+1.30996835=0.00205081$, adeoque $x=a+z=4.73205081$, qui valor a vero valore 4.73205080 differt ſolum per $\frac{1}{100000000}$ ita ut ubi in prima poſitione notæ accuratæ fuerant tantum tres, jam ſit octo, ac pariter nova ſubſtitutione iterum notarum accuratarum numerus ferè triplicaretur, quod cujus compendii ſit ſatis patet.

538. Et quidem eadem methodus aptari poteſt etiam ſimplici radicum extractioni. Si nimirum quæratur ra-

dix

dix m numeri c, quæ dicatur x erit $x^m = c$, $x^m - c = 0$, ac ſi innoteſcat jam radix proxima, quæ dicatur a, & ponatur $a + z = x$, erit $-c + a^m + ma^{m-1}z = 0$ adeoque $z = \frac{a^m - c}{-ma^{m-1}}$ vel ſi retineatur ſecunda potentia quantitatis z, erit $-c + a^m + ma^{m-1}z + \frac{m \times (m-1)}{1 \times 2} a^{m-2} z^2 = 0$, adeoque $z^2 + \frac{2a}{m-1} z + \frac{2a^m - 2c}{m \times (m-1) \times a^{m-2}} = 0$, & $z = -\frac{a}{m-1} \pm \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2a^m - 2c}{m \times (m-1)\, a^{m-2}}}$ In quibus formulis, ſi ſubſtituantur numeri patebit, quam cito ad verum radicis quæſitæ valorem liceat accedere.

§. XVI.

De ſolutione problematum, & demonſtratione theorematum.

539. Multa, quæ ad ſolutiones problematum, vel theorematum demonſtrationes pertinent, jam diximus inter ipſa exempla, quibus præcepta illuſtravimus. Addemus hic nonnulla, quæ hujuſmodi inveſtigationibus prodeſſe poſſint. in primis cavendum illud, quod utrique, & plurimum prodeſt, & vero etiam omnino neceſſarium eſt, nimirum ut rite algebraico veluti ſermone enuncientur ea, quæ ſermone communi proponuntur.

540. Quantitates deſignari litteris æqualitatem ſigno $=$, additione ſino $+$, detractionem ſigno $-$, jam initio diximus. Hinc cum ſumma quantitatum ſit id

quod ex additione provenit, differentia vero e ſubtractione unius termini ab alio; ſumma exprimitur ſigno + interjecto binis quibuſvis quantitatibus, differentia ſigno —. Problema hoc pacto enuncietur ſermone vulgari, Quæro duos numeros, quorum ſumma ſit 10, differentia 4: patet idem algebraicè enunciari hoc pacto $x + y = 10$, $x - y = 4$. Atque eodem modo expreſſiones potentiarum, & radicum, producti ex multiplicatione, vel diviſione, & alia ejuſmodi, quæ in ipſa denominatione diximus, algebraico ſermoni exercendo neceſſaria ſunt.

541. Ad ſolutionem problematum omnino neceſſarium eſt, ut ad æquationes deveniatur, quod plerumque etiam in theorematum demonſtratione contingit, Ac fere, ubi ad æquationes rite deventum eſt, res eſt perfecta. Et quidem in ſuperiore exemplo ipſa problematis enunciatione ad æquationem eſt deventum, quod ſemper contingit in problematis numericis, ubi æqualitas ſola inveſtigetur quærenda. At ſæpe artificio aliquo opus eſt, ut ad æquationem deveniatur, quod in geometria potiſſimum contingit, ubi a linearum poſitione potiſſimum res pendet, & triangulorum ſimilitudo, æqualitas quadrati baſis cum quadratis laterum in triangulo rectangulo, atque alia ejuſmodi in ſubſidium vocantur, & eorum ope ad æquationes devenitur. Pro numericis problematis, vel theorematis proferemus caſus quoſdam, qui frequentius occurrant.

542. Si inter conditiones propoſitas habeatur illud, ut quatuor termini ſint inter ſe proportionales; inde ſtatim eruitur æquatio faciendo nimirum productum extremorum æquale producto mediorum. At ſi ſint tres continue proportionales, debet quadratum medii æquari producto extremorum, & habetur æquatio eam conditionem exprimens. Quærantur bini numeri medii proportionales inter 12 & 2; quorum primus ſit medius continue proportionalis inter ſecundum, & 9. Exprimetur prima conditio ponendo $xy = 2 \times 12$, ſive $xy = 24$, ſecunda ponendo $x^2 = 9y$, ex quibus æquationibus

nibus facile deducitur quæſitos numeros eſſe 6; & 4.

543. Quod ſi quantitas quædam x ſit prima e binis mediis continue proportionalibus inter a; & b erit $x^3 = a^2 b$; ſi prima e ternis erit $x^4 = a^3 b$; ſi prima e mediis numero $m-1$, erit $x^m = a^{m-1} b$. Nam (per n. 27. c. 2. Arithm.) ſi in progreſſione quadam geometrica poſt primum terminum a, fuerit numerus terminorum m, quorum primus x, poſtremus b; adeoque numerus intervallorum m, numerus autem terminorum mediorum $m-1$, erit a ad b in ratione multiplicata per m rationis a ad x, adeoque $a . b :: a^m . x^m$; & $a x^m = a^m b$, ſive $x^m = a^{m-1} b$.

544. Atque hinc eruitur illud: ſi x debeat eſſe nſima e mediis $m-1$ inter a & b, fore $x^m = a^{m-n} b^n$. Nam ſi prima dicatur y, erunt mediæ $n-1$ inter a & x, adeoque $y^n = a^{n-1} x$: at erunt $m-1$ inter a & b, adeoque $y^m = a^{m-1} b$. In priore evehendo utrumque terminum ad potentiam m habetur $y^{mn} = a^{mn-m} x^m$; in poſteriore elevando utrumque ad potentiam n habetur $y^{mn} = a^{mn-n} b^n$. Quare erit $a^{mn-m} x^m = a^{mn-n} b^n$, & $x^m = a^{mn-n-mn+m} b^n$ ſive $x^m = a^{m-n} b^n$.

545. Pariter propoſiti vel problematis, vel theorematis conditiones rite expendendæ ſunt, ut ex iis eruantur æqualitates inter ſummas, vel differentias quantitatum

titatum

titatum quarundam, vel proportionalitates inter tota quantitates, vel earum ſummas, vel differentias, ex quibus deinde æquationes profluant.

546. Sit dolium continens 20. menſuras vini, ex quo extrahi debeat vaſe quodam menſurarum earundem numerus quidam pluribus exhauſtionibus, tum poſt ſingulas exhauſtiones infundi 4 menſuræ vini, & reliquum aqua ad eandem altitudinem impleri ita, ut poſt datum quemdam exhauſtionum, & repletionum numerum, tantundem vini contineatur in dolio, quantum aquæ.

547. Ad ſolvendum hoc problema rite perpendere oportet conditiones ipſius. In dolio poſt ſingulas repletiones habetur permixtum vinum cum aqua ita, ut in nova exhauſtione e mixto illo eruantur menſuræ quædam, quarum numerus cum ſit incognitus, nec illud quidem conſtat, quantum vini dematur inde, quantum aquæ. Conſtat tamen in vaſe ipſo rationem vini ad aquam eſſe eandem, quam in dolio, adeoque, & quantitas vini in dolio ad quantitatem vini in vaſe, quæ nimirum extrahitur erit in eadem ratione, in qua eſt quantitas aquæ in dolio ad ejus quantitatem in vaſe, ſive quantitas totius mixti in dolio ad quantitatem in vaſe, nimirum ut dolii capacitas ad capacitatem vaſis.

548. Hoc pacto proportio quædam inventa eſt, quæ ad ſolutionem problematis viam ſternet. Si enim numerus menſurarum in vaſe dicatur x. Poſt primam exhauſtionem, erit numerus munſurarum vini in dolio $20-x$, tum poſt repletionem primam $20-x+4$, ſive $24-x$: Poſt ſecundam vero exhauſtionem vinum reliquum habebitur, ſi fiat ut capacitas dolii ad capacitatem vaſis, ita vinum quod habebatur ante ejuſmodi exhauſtionem ad vinum extractum in ipſa, nimirum ut 20 ad x ita $24-x$ ad $\frac{24x-x^2}{20}$. Erit igitur reſiduum vinum

in

in dolio $24 - x - \frac{24x - x^2}{20}$. Huic reſiduo additis 4 habetur poſt ſecundam repletionem $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$. Eodem pacto ſi fiat, ut 20 ad x ita $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ ad $\frac{28x - x^2}{20} - \frac{24x^2 - x^3}{20 \times 20}$ habetur vinum in tertia exhauſtione demptum, adeoque reſiduum erit $28 - x - \frac{24x - x^2}{20} - \frac{28x - x^2}{20} + \frac{24x^2 - x^3}{20 \times 20}$, & additis 4, erit reſiduum poſt tertiam repletionem $32 - x - \frac{24x - x^2}{20} - \frac{28x - x^2}{20} + \frac{24x^2 - x^3}{20 \times 20}$.

549. Patet jam ope illius proportionis haberi poſſe poſt quemvis exhauſtionum, & repletionum numerum algebraicam expreſſionem quantitatis vini in dolio. Sed ejuſdem quantitatis expreſſio habetur ex altera conditione, quod nimirum tantumdem habeatur vini, quantum aquæ; unde fit, ut quantitas vini debeat eſſe menſurarum 10. Si igitur iſtæ binæ expreſſiones ponantur æquales, habetur æquatio, ex cujus ſolutione pendet ſolutio problematis, quæ erit ejuſdem gradus, quem exprimit exhauſtionum, & repletionum numerus.

550. Si exhauſtiones, & repletiones debeant eſſe binæ, habebitur $28 - x - \frac{24x - x^2}{20} = 10$

ſive

ſive $18 - x - \frac{24x - x^2}{20} = 0$, & $360 - 20x - 24x + x^2 = 0$, $x^2 - 44x + 360 = 0$, $x = 22 \pm \sqrt{124}$; ſive proximè $x = 22 \pm 11$. Nimirum ſive vas illud contineat paulo minus quam menſuras 11, ſive paulo plus quam 33, problemati ſatisfiet.

551. Atque hic conſiderando conditiones problematis inventa eſt proportio, cujus ope deventum eſt ad valorem quemdam, qui æquatus alteri æquationem exhibuit. Id ſæpe fit cum ſucceſſu potiſſimum in Geometria, ubi ab binos ejuſdem lineæ valores devenitur, qui æquati exhibent æquationem. Cavendum tamen illud, ut diverſi illi valores ex diverſis conditionibus deveniantur. Si enim ex eadem tantum conditione diverſa via deveniatur ad binos valores, ii licet primo aſpectu diverſi videantur, eamdem re ipſa etiam algebraice continebunt formulam, & æquationem præbebunt ſtraneam, in qua nimirum demum fiet $0 = 0$.

552. In ſuperiore exemplo, invento valore $18 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ vini reſidui poſt ſecundam repletionem, inſtituat quis hunc alium diſcurſum. Poſt primam exhauſtionem nihil aquæ relinquitur, habetur autem vacuum x, quod impletur menſuris vini 4, aquæ vero $x - 4$. Quare poſt primam repletionem habetur aquæ $x - 4$. Si fiat ut 20 ad x ita $x - 4$ ad $\frac{x^2 - 4x}{20}$, habebitur quantitas aquæ ablata in ſecunda exhauſtione. Quare poſt ſecundam exhauſtionem

erit

erit quantitas aquæ $x - 4 - \frac{x^2 - 4x}{20}$: Additur autem in ſecunda repletione pariter aquæ $x - 4$. Erit igitur quantitas aquæ poſt ſecundam repletionem $2x - 8 - \frac{x^2 - 4x}{20}$. Vini autem quantitas habebitur ſi a menſuris 20 dematur hęc quantitas aquæ; erit igitur quantitas vini $20 - 2x + 8 + \frac{x^2 - 4x}{20}$, ſive $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20}$.

553. Si jam hunc ſecundum valorem vini æquet illi prius invento, habebit $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20} = 28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$, ſive auferendo utrinque $28 - x$, & multiplicando per 20, fiet $- 20x + x^2 - 4x = - 24x + x^2$, nimirum transponendo, $0 = 0$. Quod inde obvenit, quia bini illi valores $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20}$, & $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ eruti ſunt ex eadem conditione modi, quo vinum extrahitur, ac infunditur, & idcirco algebraice quoque eundem continent valorem

rem, cum nimirum idem ſit $-\frac{24x - x^2}{20}$, ac $+\frac{x^2 - 24x}{20}$, ſive $\frac{x^2 - 4x}{20} - x$, adeoque etiam $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ idem ac $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20}$, altera autem conditio, quod poſt ſecundam exhauſtionem debeant manere 10 vini menſuræ, fuerat penitus prætermiſſa.

554. Poterat ad eandem æquationem deveniri etiam æquando quantitatem aquæ inventam poſt ſecundam repletionem menſuris 10, quo pacto fuiſſet $2x - 8 - \frac{x^2 - 4x}{20} = 10$, ſive multiplicando per 20, $40x - 160 - x^2 + 4x = 200$, vel tranſponendo $x^2 - 44x + 360 = 0$, ut prius: poterat etiam æquari quantitas aquæ quantitate vini, ac fuiſſet $2x - 8 - \frac{x^2 - 4x}{20} = 28 - x - \frac{x24 - x^2}{20}$, ſive $40x - 160 - x^2 + 4x = 560 - 20x - 24x + x^2$, ac tranſponendo $2x^2 - 88x + 720 = 0$, vel dividendo per 2 iterum $x^2 - 44x + 360 = 0$. Unde patet ea eadem æquationem ex iiſdem conditionibus deveniri pluribus viis.

555. Sæpe autem ad æquationes devenitur inveniendo algebraice partes quantitatis cujuſpiam, & ipſam totam, ac ſummam partium æquando toti; ſæpe inveniendo valores quatuor quantitatum proportionalium geometricè, ac æquando productum extremorum pro-

ductо mediorum, & aliæ in aliis caſibus induſtriæ adhibentur; in quibus potiſſimum ingenii vis proditur; hæc generales regulæ tradi poſſunt eruendi ex datis conditionibus æquationes. Nihil autem magis Tyroni proderit; quam ſi plurima problemata ſibi a præceptore proponenda curet, ac in eorum ſolutione ſe exerceat; & ab ipſo præceptore accipiat ſolutiones ipſas, ſi marte ſuo nequaquam invenerit, vel problemata ab auctoribus paſſim propoſita conetur ad æquationes deducere.

556. Nonnunquam ad æquationes eruendas oportebit ex aliis quoque facultatibus notitias habere quaſpiam, ex quibus datorum, atque quæſitorum connexio pendeat. Sint bina gravia; quorum primum ſecundo altius ſit pedibus 360, ac ad idem planum horizontale debeant ita deſcendere; ut primum illud impendat duplum ejus temporis, quod impendit ſecundum, & præterea minuta ſecunda horaria tria. Quæratur altitudo, & tempus.

557. Ad ſolvendum hoc problema oportet noſſe hæc duo ex Mechanica. Primo, gravia libere deſcendentia ſingulis ſecundis percurrere pedes 15 quamproxime, ſecundo ſpatia libere deſcendendo percurſa eſſe ut quadrata temporum, quibus percurruntur.

558. Dicatur jam x tempus, quod impendit ſecundum grave, computatum in minutis ſecundis, erit que tempus, quod impendit primum $= 2x + 3$, ac pariter ſi altitudo ſecundi computata in pedibus dicatur y, erit altitudo primi $y + 360$. Jam vero erit ut quadratum unius ſecundi ad quadratum temporis x, ita pedes 15 ad ſpatium y, ſive $1 . x^2 :: 15 . y$. Pariter ut 1 ad quadratum temporis $2x + 3$ ita pedes 15 ad $y + 360$, ſive $1 . 4x^2 + 12x + 9 :: 15 . y + 360$. Ex prima proportione habetur $y = 15x^2$, ex ſecunda $y + 360 = 60x^2 + 180x + 135$; adeoque in hac ſecunda $y = 60x^2 + 180x - 225$,

quo valore y comparato cum priore, habetur $60x^2 + 180x - 225 = 15x^2$; ſive $45x^2 + 180x - 225 = 0$, vel $x^2 + 4x - 5 = 0$, nimirum $x = -2 \pm \sqrt{9}$; unde inferuntur bini valores x, nimirum 1, & -5, ac ope eorum in æquatione $y = 15x^2$ habentur bini valores y, nimirum 15, & 375.

559. Notetur autem hic illud; in problematis mere numericis radicem quamcumque ſatisfacere quæſtioni dummodo negativi numeri rite tractentur, & eorum addito fiat ſubtrahendo. At in aliis problematis, plerumque negativæ radices quæſtioni vulgari ſermone propoſitæ nequaquam ſatisfaciunt; ſatisfacient tamen ſemper quæſtioni ipſi propoſitæ aliis terminis, & nonnihil immutatæ; ſive parti cuipiam quæſtionis ipſius, de qua ſæpe ne cogitaveramus quidem, & pluralitate radicum Algebra monet quodammodo, & alloquitur ejus idiomatis gnarum, ac oſtendit partem illam problematis ipſius, quam non animadverterat Analyſta. Ejus exempla multo frequentius occurrunt in Geometria, ubi ſi poſitivæ quantitates verſus certam plagam aſſumantur, negativæ exprimunt plagam oppoſitam. Occurrunt tamen exempla ubique, dummodo ubi negativi valores obveniunt, pro anticipatione accipiatur poſticipatio, pro exceſſu defectus pro progreſſu regreſſus, pro lucro debitum contractum, pro vi propellente vis retrahens, & alia ejuſmodi.

560. In caſu noſtro valor $x = 1$ ſatisfacit queſtioni. Et primum grave tempore ſecundorum $2x + 3 = 5$ percurrit pedes $y + 360 = 15 + 360 = 375$, ſecundum tempore ſecundi 1 pedes 15. Et quidem eſt, ut 1 ad $5 \times 5 = 25$, ita 15 ad 375, ut oportebat. At valor $x = -5$ quæſtioni, ut eſt propoſita, nequaquam ſatisfacit: Primum enim deberet in deſcenſu per altitudinem $375 + 360 = 735$ impendere tempus $2x + 3 = -10 + 3 = -7$, ſecundum in deſcenſu per altitudinem 375 impendere tempus -5. Verum quo pacto tempus negativum impendi poſſit omnino non ap-

paret. Si autem pro negativis temporibus -7, & -5 ſumantur poſitivi 7, & 5, habebuntur quidem ſpatia 735, 375 percurſa temporibus 7 & 5, cum ex ſolutione problematis debeat eſſe 1.15 :: -7×-7. 735, & 1.15 :: -5×-5. 375; ac -7×-7 ſit $= 7 \times 7$, & $-5 \times -5 = 5 \times 5$. Verum tempus ſecundorum 7 non excedit duplum temporis ſecundorum 5, per 3 ſecunda; ſed ab eo deficit. Quare negativus ille valor, mutatis omnium temporum ſignis, quæ mutatio æquationem non mutat, cum ſola temporum quadrata ingrediantur conditiones exhibentes æquationem ipſam, exhibet ſolutionem problematis, quo quæratur, ut primum grave impendat minus quam duplum temporis impenſi a ſecundo, exiſtente defectu ſecundorum trium, quo pacto ſolus exceſſus in defectum mutatus eſt. Ac eodem pacto licebit ſemper analyticum ſermonem interpretari, & videre, cui problemati negativi valores aptari poſſint; quod aliquando primo intuitu apparebit, aliquando difficilius detegetur.

561. In theorematum demonſtratione pariter quandoque res erit per ſe manifeſta; ſæpe tamen longiore ambitu opus erit, & artificio aliquo, ac ingenii vi, qua quod in theoremate proponitur; algebraice rite expreſſum ita tractetur, ut veritas in eo enunciata, quæ plerumque æqualitatem aliquam involvit, deprehendatur.

562. Si proponatur hujuſmodi theorema. Quadratum binomii continet bina quadrata binorum terminorum, & duplum eorundem productum. Id nullo negotio demonſtratur. Satis eſt binomium $a + b$ ducere in ſe ipſum, & habetur $a^2 + 2ab + b^2$, quod ſtatim illius ipſius theorematis veritatem exhibet.

563. At ſi proponatur hoc aliud: Si quantitas quædam ſecetur bifariam, & non bifariam, bina quadrata partium inæqualium æquabuntur binis quadratis æqualium una cum binis quadratis differentiæ partis æqualis & utriuſvis inæqualium, hoc theorema longiore ambitu indigebit. Sic enim utralibet e binis partibus æqua-

libus

libus dicatur a, partium inæqualium major m, minor n, erit differentia illa $m - a$, cujus quadratum $mm - 2am + aa$; ejuſque duplum $2mm - 4am + 2aa$, cui ſi addantur bina quadrata partium æqualium ſive $2aa$, fiet $2mm - 4am + 4aa$. Porro cum ſit $m + n = 2a$ erit $n = 2a - m$; adeoque $nn = 4aa - 4am + mm$, & quadrata partium inæqualium $nn + mm = 4aa - 4am + 2mm$. Cum igitur eadem quantitas inventa ſit tam capiendo bina quadrata differentiæ illius, una cum binis quadratis partium æqualium, quam capiendo bina quadrata inæqualium, patet theorematis veritas.

564. Atque hoc pacto ope æquationis cujuſdam devenitur etiam ad demonſtrationes theorematum, inveniendo æquales eidem cupiam quantitati terminos illos, quorum æqualitas in ipſo theoremate enunciatur. Quin immo ſi theorema ſit falſum, deprehenditur ejus falſitas. Sic in ſuperiore theoremate ſi enunciatum fuiſſet bina quadrata partium inæqualium æquari binis quadratis illius differentiæ & ternis quadratis partis æqualis, falſitas deprehenſa fuiſſet: quia debuiſſet eſſe $4aa - 4am + 2mm - 4am + 5aa$, ſive $0 = aa$, quod eſt abſurdum, ſi ipſa quantitas $2a$ non ſit $= 0$.

565. Sæpe autem a ratione denominandi pendet facilitas major, vel minor demonſtrandi. Sic hoc ipſum poſtremum theorema multo expeditius demonſtraretur, ſi partium inæqualium major diceretur $a + b$, adeoque minor $a - b$. Nam prioris quadratum eſſet $aa + 2ab + bb$, poſterioris $aa - 2ab + bb$, adeoque eorum ſumma $2aa + 2bb$ æqualis binis quadratis partium æqualium a, & binis differentiæ b.

566. Ratio tamen denominandi potiſſimum in ſolutione problematum diligenter eſt perpendenda; ſæpe enim multo faciliorem ſolutionem exhibet denominatio rite inſtituta. Atque in primis, ſæpe liberat ab æquationum multiplicitate. Si quærantur tres numeri continue proportionales, ita, ut ſumma primi ac ſecundi ſit $= 6$, ſumma vero extremorum cum duplo ſecundi ſit 18, &

ſi numeri dicantur x, y, z, habebuntur tres æquationes. Prima ex proportione $x . y :: y . z$, erit $xz = y^2$ ſecunda ex ſecunda conditione $x + y = 6$, tertia ex tertia $x + 2y + z = 18$, ex quibus ad unicam deveniretur methodo expoſita num. 168. Sed evitari poſſunt plures æquationes ſola conditionum conſideratione. Si enim primus numerus dicatur x, is ablatus a ſumma 6 relinquet ſecundum $= 6 - x$. Factis autem $x, 6 - x :: 6 - x, \frac{36 - 12x + x^2}{x}$, hic erit tertius numerus. Erit autem ex poſtrema conditione $x + \frac{36 - 12x + x^2}{x} + 12 - 2x = 18$, quæ eſt unica æquatio, & reducta exhibet $\frac{36 - 12x + x^2}{x} - x = 6$, vel $36 - 12x + x^2 - x^2 = 6x$, ſive $36 = 18x$, vel demum $x = 2$, quo invento invenitur ſecundus $= 6 - x = 6 - 2 = 4$, & tertius $= \frac{16}{2} = 8$.

567. Aliquando ex ipſa denominatione, vel ex electione incognitæ retinendæ in æquatione, eliminatis ceteris, pendet etiam æquationis gradus, qui poteſt fieri depreſſior. Sit hujuſmodi problema: invenire duos numeros, quorum ſecundus ſit medius inter primum & 8, duplum autem quadratum ſecundi una cum triplo primo efficiat 38. Si primus numerus dicatur x, ſecundus y, erit $y^2 = 8x$, & $2y^2 + 3x = 38$. Si eliminetur y, erit in prima æquatione $2y^2 = 16x$, quo ſubſtituto in ſecunda, fit æquatio primi gradus $16x + 3x = 38$, ſive $19x = 38$, $x = 2$. At ſi eliminetur x, habetur in prima $x = \frac{y^2}{8}$, adeoque ſecunda evadit æquatio gradus

ſecun-

ſecundi, $2y^2 + \frac{3}{8}y^2 = 38$, ſive $16y^2 + 3y^2 = 304$, vel $19y^2 = 304$, ac $y^2 = 16$, vel $y = 4$.

568. Porro ubi ſolutionem æquationum gradus quarti reduximus ad ſolutionem æquationum gradus tertii, oſtendimus num. 387, & 389. e tribus illis aſſumptis u, m, n, eliminatis m, & n obvenire equationem gradus ſexti carentem alternis terminis, adeoque æquivalentem equationi gradus tertii, cum contineat ſolum u^6, u^4, u^2; ſi autem retineatur m, vel n, obvenire æquationem gradus ſexti cum omnibus terminis intermediis, ac id ipſum ante æquationis derivationem deprehendi ex eo, quod e ſex valoribus u, bini quique ſolo ſigno differre debeant, adeoque valores u^2 ſint ſolum tres, dum valores m, vel n omnes etiam magnitudine inæquales ſunt. Tanti intereſt conſiderare, quæ incognita ad equationem finalem ſit adhibenda.

569. Diximus (num. 189.) in problematum conſideratione, ſi tot ſint conditiones, ex quibus equationes derivari poſſunt, quot incognitæ, problema eſſe determinatum, ſi plures, pluſquam determinatum, ſi pauciores indeterminatum. Aliquando tamen plures ejuſmodi conditiones poſſunt eamdem prorſus æquationem prebere, & tunc licet tot ſint conditiones ejuſmodi, quot incognitę, problema erit indeterminatum. Querantur bini numeri medii geometrice proportionales inter 2, & 12, ac inter 1, & 24: Dicantur x, & y, ac ex prima conditione erit $xy = 2 \times 12$, ex ſecunda $xy = 1 \times 24$, nimirum ex utraque $xy = 24$, adeoque aſſumpto quovis numero pro x, & facto $y = \frac{24}{x}$, ſatisfit utrique conditioni, ac utraque exhibente eamdem æquationem problema remanet indeterminatum.

570. Quandoque autem poteſt æquivalere problemati, pluſquam determinato, licet tot incognitæ ſint, quot æquationes, quæ nimirum inter ſe pugnent. Ut ſi que-

rantur bini numeri medii geometricè proportionales inter 2, & 12, ac inter 4, & 16: Prima conditio requireret $xy=24$, ſecunda $xy=64$. quod fieri non poteſt, cùm non poſſit eſſe $24=64$.

571. In problematis indeterminatis infinitæ ſolutiones inveniri poſſunt; ponendo in æquatione finali, quæ remanet, eliminatis tot aliis incognitis, quot aliæ æquationes habebantur, & retinet adhuc plures incognitas, pro ſingulis incognitis, dempta unica, valores quos libuerit. Fiet enim æquatio determinata, quæ exhibebit valores incognitæ relictæ, qui conjuncti cum reliquarum arbitrariis ſolvent problema. Quærantur quatuor numeri ita, ut ſumma primi bis, ac ſecundi ſemel accepta ſit 6, ſumma omnium 20. Si dicantur x, y, z, u, erit $2x+y=6$, $x+y+z+u=20$. Ex prima $y=6-2x$, quo valore ſubſtituto in ſecunda, habetur $x+6-2x+z+u=20$, ſive $z+u-x=14$. Ponantur pro z, & u quicunque valores, ut 7, & 8, & erit $15-x=14$, ſive $1=x$, adeoque $y=6-2=4$. Quare numeri 1, 4, 7, 8 ſatisfaciunt quæſtioni. At ſi ponantur 10, & 12 pro z, & u, erit $22-x=14$, $x=8$, $y=6-16=-10$, ac proinde numeri 8, -10, 10, 12 pariter quæſtioni ſatisfaciunt, & quicunque alii numeri in hac finali æquatione ponantur pro z, & u, ſemper problema ſolvitur.

572. Ubi in æquatione finali cognitæ illæ ad eumdem gradum non aſſurgunt præſtabit plerumque ſubſtituere valores arbitrarios pro iis incognitis, quæ aſſurgunt ad gradus altiores, ut remaneat æquatio reſolvenda gradus infimi, adeoque minus difficulter reſolvi poſſit. Sit æquatio $2x^3yz^2-10x^2z+8xyz+16y=0$. Si valores arbitrarii ſubſtituantur pro y, & z, relinquitur æquatio gradus tertii ob illud x^3, ſi pro x, & y, relinquitur æquatio gradus 2 ob illud z^2, ſi demum pro x, & z, relinquitur æquatio gradus primi, cum y primam dimenſionem non excedat.

573. Præ-

573. Præſtabit tam aliquando altiores gradus retinere, ut nimirum tuto ad aliquam ſolutionem deveniatur. Nam quotieſcumque ęquatio, quę poſt ſubſtitutionem remanet, eſt gradus imparis, aliqua ſaltem habetur radix realis (per num. 219), ſi autem ſit gradus paris, poteſt omnes radices habere imaginarias, quo caſu per illam ſubſtitutionem æquatio non ſolvitur. Sit æquatio $x^3y^2 - 6x^2y^2 - 4x^2y + 29xy + 22x - 96 = 0$. In ea ſi pro x ponatur 1, fiet $y^2 - 6y^2 - 4y + 29y + 22 - 96 = 0$; quæ reducta evadit $5y^2 - 25y + 74 = 0$, ſive $y^2 - 5y + 14.8 = 0$, ac proinde $y = 2.5 \pm \sqrt{(6.25 - 14.8)}$, quæ ſunt radices imaginariæ. Poſito quoque $x = 2$, habetur $8y^2 - 24y^2 - 16y + 58y + 44 - 96$, quæ ęquatio reducitur ad hanc $16y^2 - 42y + 52 = 0$ ſive $y^2 - \frac{21}{8}y + 3.\frac{1}{4} = 0$, cujus radices $\frac{21}{16} \pm \sqrt{\frac{441}{256} - 3.\frac{1}{4}}$, ſive $\frac{21}{16} \pm \sqrt{1.\frac{185}{256} - 3.\frac{1}{4}}$ pariter imaginariæ. Quamobrem plures ſubſtitutiones inſtituendę ſunt, donec caſu incidatur in illas, quę exibeant radices reales. At quovis valore ſubſtituto pro y, prodit ęquatio gradus tertii, quæ ſemper habet aliquam radicem realem. Sic ſi pro y ponatur 2, æquatio evadit $4x^3 - 24x^2 - 8x^2 + 58x + 22x - 96 = 0$, ſive $4x^3 - 32x^2 + 80x - 96 = 0$, vel $x^3 - 8x^2 + 20x - 24 = 0$, quæ, cum, poſito $z + \frac{8}{3} = x$, mutetur in hanc $z^3 - 1.\frac{1}{3}z - 8.\frac{16}{27} = 0$, habet (per n. 335. & 336.) binas quidem radices imaginarias, ſed unam realem.

574. Quando autem poteſtas maxima omnium incognigni-

gnitarum aſcendit ad gradum parem, fieri poteſt, ut problema ſit prorſus impoſſibile, & ſubſtituto quovis valore pro quavis ex incognitis, adhuc numquam deveniri poſſit ad ſolutionem problematis. Atque id omnino ſemper eveniet, cum primum membrum habuerit ſimplicia incognitarum quadrata poſitivis ſignis affecta una cum cognitis quibuſvis poſitivis, ut in æquatione $x^2 + y^2 + a = 0$, in qua, ſi a ſit quantitas poſitiva, & pro x, ac y, ponantur valores quicumque vel poſitivi, vel negativi ſemper $x^2 + y^2$ erit & ipſa poſitiva quantitas, adeoque $x^2 + y^2 + a$ non poteſt eſſe $= 0$. Quin etiam ſi nulla quantitas cognita adſit, ut in æquatione $x^2 + y^2 = 0$, vel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, niſi omnes incognitæ ponantur $= 0$, æquationi non ſatisfiet.

575. Idem continget ſemper etiam, ubi habeantur quadrata binomiorum, vel polinomiorum quorumcumque, dummodo inter ea adſit vel quantitas poſitiva cognita, vel quadratum ſimplex incognitæ, præfixo ſemper quadratis poſitivo ſigno. Nam quadrata illa ſemper poſitiva erunt, & evaneſcere non poterit eorum ſumma, niſi ſingula ex iis fiant $= 0$, quod evenire non poterit, ſi unum ex iis ſit ſimplex, niſi illa ipſa quantitas, cujus eſt id quadratum, fiat $= 0$, & ſi omnia quadrata evaneſcant, quantitas autem cognita poſitiva præterea adſit, adhuc totum non evaneſcit. Sit æquatio $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 y^2 = 0$. Tranſpoſito poſtremo termino, fieret $x^2 + 2xy + y^2 = - z^2 y^2$, ſive extractis radicibus $x + y = \sqrt{- z^2 y^2}$, ubi quicumque valores ſubſtituantur pro y, z, vel poſitivi, vel negativi, ſemper $\sqrt{- z^2 y^2}$ erit valor imaginarius, adeoque nulli erunt valores earum quantitatum, qui conjungi poſſint cum aliquo valore x ita, ut proble-

ma

ma fiat poſſibile, niſi fiat $z=0$, quo caſu facto etiam $x^2+2xy+y^2=0$, haberetur $x+y=0$ & $x=-y$. Sed ſi æquatio ſit $x^2+2xy+y^2+z^2y^2+a$, ne hoc quidem artificio ſatisfiet, cum evaneſcentibus reliquis, non poſſit evaneſcere a.

576. Quin immo licet gradus incognitæ cujuſpiam ſit impar, adhuc tamen contingere poterit, ut nulli numeri problemati ſatisfaciant, niſi illa quantitate poſita $=0$; ſi nimirum ea incognita inveniatur in terminis omnibus æquationis, ac ubi ad minimam potentiam aſſurgit, ſit gradus pariter imparis. Diviſa enim æquatione per eum ejus incognitæ gradum, relinquetur æquatio gradus paris. Si æquatio ſit $x^5+2x^4y+y^2x^3+z^2y^2x^3+ax^3=0$, ea diviſa per x^3, habebitur æquatio $x^2+2xy+y^2+z^2y^2+a=0$, impoſſibilis per numerum præcedentem. Quare & æquatio $x^5+2x^4y+y^2x^3+z^2y^2x^3+ax^3=0$, impoſſibilis erit, quicumque enim numeri ſubſtituantur pro x, z, y, ſemper æquatio proveniet compoſita ex binis $x^3=0$, $x^2+2xy+y^2+z^2y^2+a=0$, adeoque habebit tres radices $=0$, & binas imaginarias.

577. Æquationibus indeterminatis exprimitur nexus quidam inter quantitates illas incognitas, quæ poſſunt conſiderari ut indeterminatæ quantitates inter ſe ita connexæ, ut magnitudo unius a cæterarum magnitudine pendeat; ac is nexus etiam ubi æquatio binis tantummodo conſtat incognitis, eſt multo generalior eo, quem expreſſimus §. XIV, cum ſæpiſſime ita poſſint eſſe permixtæ quantitates illæ, ut nullo artificio ſeparari poſſint, nec ulla formula inveniri data per alteram, qua exprimatur alterius valor, ut ibi; quod quidem contingit, ubi ad altiores gradus elevetur utraque; nam ſi ad ſecundum tantummodo elevetur altera, ſemper conſide-

rata

rata altera tanquam cognita, ope methodi æquationum ſecundi gradus invenitur alterius valor, ut num. 575. in æquatione $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 y^2 + a = 0$ invenimus $x = -y + \sqrt{-z^2 y^2 - a}$. Quin immo etiam ſi altera ſit elevata ad gradum tertium, vel quartum, inveniri poſſunt formulæ, quæ ejus valorem exhibeant per reliquas; licet fieri poſſit, ut incidatur in quantitates imaginarias etiam, ubi ea quantitas realis eſt, adhibendo nimirum formulas, quæ proveniunt ex reſolutione æquationum eorum graduum, ut docuimus §. XII, & XIII.

578. Plurima demonſtrari poſſunt circa hujuſmodi quantitatum nexus, & incrementa, ac decrementa earundem, ac circa limites valorum alterius quantitatis, qui alteram realem exhibeant, vel qui exhibeant datum numerum earumdem realium ſibi reſpondentium ubi in æquationibus altioribus plures radices haberi poſſunt: & quidem, ubi binæ tantummodo indeterminatæ ſunt, vel tres, nexus idem exprimitur, & vero ipſis etiam oculis ſubjicitur in Geometria, in priore caſu lineis, in poſteriore ſuperficiebus, ac omnium curvarum, quas algebraicas dicunt, natura ab hujuſmodi æquationibus pendet, ut natura altiorum quarumdam, quas dicunt tranſcendentes, pendet ab æquationibus quibuſdam omnem finitam algebram tranſcendentibus, & involventibus quantitates infiniteſimales. Ac de illis quidem agemus in applicatione Algebræ ad Geometriam, de his in calculo infiniteſimali.

579. Interea oſtendemus methodum, qua inveniri poſſint limites omnium ſubſtitutionum reddentium problema poſſibile, ubi una incognita aſſurgit ad ſecundum gradum tantummodo. Tractata hac ſola ut incognita, inveniatur ejus valor methodo, qua reſolvuntur æquationes gradus ſecundi. Is valor continebit quantitatem ſigno radicali affectam, quæ quantitas, prout fuerit poſitiva, vel negativa, problema erit poſſibile, vel impoſſibile. Et primo quidem non habeat ea quantitas ullum diviſorem

orem continentem quantitatem incognitam, ac ponatur $= 0$. Æquationis ex hac poſitione reſultantis inveniantur radices omnes, ac eæ, quæ non habent alias ita ſibi æquales, ut æqualium numerus ibi ſit par, dicantur radices primi generis, reliquæ, ſi quæ non ſint, dicantur ſecundi. Radices primi generis erunt quæſiti limites, cum in iis tantum primum ejus æquationis membrum, ſive quantitas illa ſigno radicali incluſa debeat tranſire per o, adeoque mutari e poſitiva in negativam, vel viceverſa. Subſtituta nimirum quavis e radicibus primi generis, quantitas illa ſigno radicali incluſa debet eſſe $= 0$, ſubſtituta quavis interjecta inter eam, & proximè ſequentem ejuſdem generis, debet eſſe valoris vel ſemper poſitivi, vel ſemper negativi: & inter illam ſequentem, & aliam ejuſdem generis, quæ ipſam proximè conſequitur, valor debet eſſe oppoſitus, & ita porro. Solum ſi inter binas ejuſmodi radices inveniatur radix aliqua ſecundi generis, ea ſubſtituta, habebitur non quantitas ejuſdem ſigni, cum reliquis, quæ iiſdem limitibus includuntur, ſed $= 0$. Quare ſubſtituto valore cujuſvis radicis utriuſlibet generis, problema erit poſſibile; ſubſtituto autem unico valore non congruente cum radice ulla, ſi quantitas illa obvenerit negativa, innoteſcet problema eſſe impoſſibile ibi, & in omnibus aliis poſitionibus uſque ad limitem proximum: ſi poſitiva, poſſibile, ac inde jam conſtabit, quid inter binos quoſque primi generis limites proximos contineatur, cum in ſingulis debeat poſſibilitas mutari in impoſſibilitatem, vel viceverſa.

580. Sit æquatio $y^3 - 11y^2 + x^2 + 2xy + 59y + 20x + 72 = 0$. Erit $x^2 + (2y + 20)x + (y^3 - 11y^2 + 59y + 72) = 0$. Quare $x = -(y + 10) \pm \surd((y^2 + 20y + 100) - (y^3 - 11y^2 + 59y + 72))$ cujus terminus irrationalis non continet ullum diviſorem habentem y. Eo poſito $= 0$, fiet $y^2 + 20y + 100 = y^3$

$- 11$

$-11y^2+59y+72$, ſive $y^3-12y^2+39y-28=0$. Hæc æquatio componitur ex hiſce tribus $y-1=0$, $y-4=0$, $y-7=0$, adeoque habet radices reales 1, 4, 7, omnes inæquales; Hæ igitur erunt limites quæſiti; Ponatur pro y valor quivis non congruens cum iis radicibus in quantitate affecta ſigno radicali, nimirum in $y^2+20y+100-(y^3-11y^2+59y+72)$; commodiſſimum autem erit ſubſtituere 0, & habetur $100-72$ valor poſitivus. Quare facta pro y quavis ſubſtitutione numeri cujuſvis negativi, vel minoris quam 1, problema erit poſſibile; poſito quovis medio inter 1 & 4 erit impoſſibile; poſito quovis inter 4 & 7 erit iterum poſſibile; poſito vero quovis majore quam 7, erit iterum impoſſibile, ac poſitus etiam 1, 4, 7 poſſibile erit. Et quidem ſi ponatur $y=2$, habebitur $4+40+100-(8-44+118+72)=144-154=-10$ quantitas negativa, quod oſtendit facto $y=2$ problema eſſe impoſſibile cum debeat eſſe $x=-(2+10)\pm\sqrt{-10}$. Atque eodem modo licebit aliis ſubſtitutionibus factis in eodem exemplo canonis veritatem experiri.

581. At ſi terminus irrationalis habeat diviſores continentes incognitam; reducatur tota ad eundem denominatorem, tum ponatur $=0$ tam formula numeratoris, quam formula denominatoris ac binarum æquationum radices primi generis omnes erunt limites, & ſi quæ fuerint radices communes tam numeratori, quam denominatori, ita, ut eorum numerus in utraque æquatione ſimul ſit impar, adhuc erunt limites, ſecus ſi par. Nam ſive numerator, ſive denominator ſignum mutet, mutabit ipſum quotus quantitatem exhibens. Mutabit autem ſignum numerator in ſuis radicibus primi generis, denominator in ſuis. Igitur ſi hæ communes utrique non fuerint, mutabit quotus in ſingulis. Si autem radicum communium numerus in uno fuerit impar in altero par, nimirum in utroque ſimul impar; mutabit ibi ſignum ille, non hic, adeoque mutabit & quotus:

ſi in

ſi in utroque ſeorſum ſumpto fuerit impar, vel in utroque par, adeoque in utroque ſimul par, mutabit ſignum in primo caſu uterque, in ſecundo neuter; adeoque ſignum quoti manebit in utroque caſu.

582. Sit æquatio $x^2y + 2xy^2 + 13x^2 + 35y^2 + 26xy + 60x + 121y + 328 = 0$. Erit $(y+3)x^2 + (2y^2 + 26y + 60)x + (35y^2 + 121y + 328) = 0$; ſive $x^2 + (2y + 20)x + \left(35y + 16 + \frac{280}{y+3}\right) = 0$, adeoque $x = -(y+10) \pm \sqrt{\left((y^2 + 20y + 100) - \left(35y + 16 + \frac{280}{y+3}\right)\right)}$. Si quantitas irrationalis reducatur ad eamdem denominatorem multiplicando per $y+3$, fiet, $\left(\frac{y^3 + 23y^2 + 160y + 300}{y+3}\right) + \left(\frac{35y^2 + 121y + 328}{y+3}\right)$, ſive $\frac{y^3 - 12y^2 + 39y - 28}{y+3}$. Ex numeratore poſito $= 0$ habetur æquatio $y^3 - 12y^2 + 39y - 28 = 0$, cujus radices, ut num. 580, ſunt 1, 4, 7: ex denominatore æquatio $y+3 = 0$, cujus radix unica -3. Quare limites ſunt -3, 1, 4, 7. Poſito autem $y = 0$ in quantitate irrationali $\frac{y^3 - 12y^2 + 39y - 28}{y+3}$, habetur $\frac{-28}{3}$ valor negativus. Quare ſubſtitutiones valorum

rum

rum exiſtentium inter — 3, & 1 reddunt problema impoſſibile, negativorum ante — 3, & poſitivorum inter 1, & 4 poſſibile, inter 4, & 7 impoſſibile, poſt 7 poſſibile.

583. Illud hic notandum tantummodo, ſi ſubſtituatur valor radicis cujuſvis ortæ ex numeratore, non communis denominatori, vel contra; valorem quantitatis irrationalis evadere $= 0$, vel infinitum. Nam fiet in primo caſu numerator $= 0$, denominator quantitas finita, in ſecundo numerator quantitas finita, denominator $= 0$. Sic in ſuperiore exemplo ſi ponatur 1 pro y in formula $\frac{y^3 - 12y^2 + 39y - 28}{y + 3}$, habetur $\frac{0}{4}$, ſi ponatur $- 3$, habetur $\frac{-280}{0}$,

584. At ſi ponatur valor radicis communis tam numeratori quam denominatori, valor erit $= 0$, finitus vel infinitus, prout numerus radicum ejus valoris fuerit in numeratore major, æqualis, vel minor, quam in denominatore, & in eo caſu, in quo is valor finitus eſt, invenietur hoc pacto. Deriventur tam ex numeratore, quam ex denominatore aliæ ex aliis formulæ methodo expoſita (num. 464.), donec deveniatur ad formulas ex illa poſitione non evaneſcentes, & valor fractionis erit is, quem exhibebit fractio habens valores ita provenientes in iis formulis in numeratore, & denominatore. Atque hæc quidem regula generalis eſt omnibus fractionibus algebraicis continentibus indeterminatam quantitatem tam in numeratore, quam in denominatore, & carentibus terminis radicalibus, indeterminatam ipſam involventibus, qui ſubſtituto valore aliquo pro indeterminata eadem, ſimul evaneſcant. Ratio autem methodi in eo ſita eſt, quod ſi ponatur pro ipſa indeterminata radix illa aucta quantitate in immenſum exigua; differentia formulæ, ſive hic, ubi

ſubſtituta radice, formula propoſita evaneſcit, valor formulæ ipſius exhibetur quam proximè, a formula, quæ inter derivatas prima non evaneſcit ducta in incrementum illud radicis; vel ejus quadratum vel cubum, & diviſa per 1, vel 1×2, vel 1×2×3 prout fuerit primo, vel ſecundo, vel tertio derivata, & ita porro juxta hu. 467. Ubi vero plures ſunt radices æquales; ibi ſerius devenitur ad formulam non evaneſcentem; adeoque ſi numerus radicum æqualium fuerit major in numeratore; devenietur in eo ad formulam non evaneſcentem ſerius, quam in denominatore, & poteſtas incrementi radicis, in quam ducetur formula primo non evaneſcens orta ex numeratore; erit altior, quam in denominatore; & valorem ipſius reddet infinities minorem: contra vero ſi numerus radicum in numeratore fuerit minor. Si autem æqualis fuerit radicum æqualium numerus utrobique; devenietur utrobique ſimul ad formulam non evaneſcentem; & utrobique poteſtas incrementi radicis, in quam ea ducitur; & numerus, per quem dividetur; erit inde prorſus; ac proinde ſatis erit ſolas formulas derivatas dividere alteram per alteram; quo præſtito habebitur quam proximè valor fractionis ortus ex ſubſtitutione valoris in immenſum proximi valori radicis; adeoque habebitur accurate valor ortus ex ſubſtitutione ipſius radicis.

585. Sit fractio $\dfrac{y^4 - 7y^3 + 18y^2 - 20y + 8}{y^3 - y^2 - y8 + 12}$

Poſito 2 pro y, utraque evadit $= 0$. Facto numeratore $= 0$, oritur æquatio $y^4 - 7y^3 + 18y^2 - 20y + 8 = 0$, compoſita ex æquationibus $y - 2 = 0$; $y - 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $y - 1 = 0$, adeoque habens tres radices equales $= 2$, facto $= 0$ denominatore, oritur $y^3 - y^2 - 8y + 12 = 0$ compoſita ex $y - = 0$, $y - 2 = 0$, $y + 3 = 0$, adeoque habens binas radices æquales $= 2$, & ex nu-

meratore derivatur formula $4y^3 - 21y^2 + 36y -$ 20, ex denominatore $3y^2 - 2y - 8$, quarum utraque, poſito 2 pro y, evaneſcit: ſecundò autem derivata erit ibi $12y^2 - 42y + 36$ pariter evaneſcens, hic $6y - 2$ non evaneſcens, ac ibi quidem ſolum tertio derivata $24y - 42$ non evaneſcit. Hinc ea fractio, poſito 2 pro y, fit $= 0$.

586. At ſi fractio ſit $\dfrac{y^4 - 9y^3 + 4y^2 + 36y - 32}{y^3 - y^2 - 8y + 12}$; cujus & numerator, & denominator evaneſcit, poſito 2 pro y, æquatio proveniens ex numeratore facto $= 0$, componitur ex æquationibus $y - 2 = 0$, $y - 8 = 0$, $y + 2 = 0$, $y - 1 = 0$, adeoque habet unicam radicem $= 2$, at æquatio orta ex denominatore componitur ex æquationibus $y - 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $y + 3 = 0$, & formula ex numeratore primo derivata $4y^3 - 27y^2 + 8y + 36$ non evaneſcit, ex denominatore vero primo derivata $3y^2 - 2y8 -$ evaneſcit, ac ſolum ſecundo derivata $6y -$ non evaneſcit. Ejus igitur fractionis valor eſt infinitus.

587. Si demum fractio ſit $\dfrac{y^4 + 4y^3 + 3y^2 + 4y - 4}{y^3 - y^2\ 8y + 12}$, æquatio orta ex numeratore habet radices 2, 2, 1, -1, orta vero ex denominatore habet 2, 2, -3, adeoque in utraque idem eſt earum radicum numerus, & derivatis ex illo $4y^3 - 12y^2 + 6y + 4$, & $12y^2 - 24y + 6$, ex hoc $3y^2 - 2y - 8$, & $6y - 2$, prima evaneſcit utrobique, ſecunda ibi evadit 6, hic 10; adeoque valor ejus fractionis eſt $= \dfrac{6}{10}$.

588. Si autem formula radicales terminos habeat, methodus quidem eſt eadem; ſed oportet radicalium ipſorum differentias noſſe, quod in calculo differentiali docebimus. Hæc de fractionibus habentibus numeratores, & denominatores evaneſcentes dicta ſufficerint, occaſione accepta a limitibus poſſibilitatis æquationum indeterminatarum, in quibus limitibus præcipua præcepta exemplis quoque illuſtravimus; nam ſingula perſequi, ac illuſtrare exemplis, & infinitum eſſet, & exigui fructus. Ad alia ulteriora properabimus.

589. In problematis indeterminatis, ut etiam in determinatis, plerumque problema haberi poteſt pro ſoluto, ubi ad æquationem deventum ſit. At potiſſimum in problematis numericis, ſi inter conditiones habeatur, ut excludatur irrationalitas, vel fractio, poſt inventam æquationem cætera exhibentem, quæ fere admodum facile invenitur, multo longiore ambitu opus eſt, & ſæpe nullo artificio problema ſolvi poteſt. Id autem contingit quia iiſdem algebraicis litteris eodem prorſus modo rationales, & irrationales, integræ, & fractæ, poſitivæ ac negativæ quantitates exprimuntur. Adeoque eæ conditiones immediate exprimi non poſſunt. Exhibebimus exempla aliquot.

590. Quærantur bini numeri quadrati, quorum differentia æquetur numero dato. Si datus numerus dicatur a, quæſiti x, & y, habebitur $x-y=a$. In hujuſmodi æquatione ſi pro y ſubſtituatur quivis numerus quadratus, erit $x=a+y$, adeoque valor quidem x obtinetur per ejuſmodi æquationem; ſed non habetur conditio, ut x ſit numerus quadratus, & ſic flat $x^2-y^2=a$ adeoque $x^2=a+y^2$, habetur quidem & $x=\sqrt{a+y^2}$, ſed habetur per formulam, quæ non ſtatim conſtat, quo pacto ab irrationalitate liberari poſſit. Solvetur autem problema hoc artificio. Dicatur radix primi numeri quæſiti $x+y$ ſecundi $x-y$. Illius quadratum eſt $x^2+2xy+y^2$; hujus $x^2-2xy+y^2$.

Quare eorum differentia erit $4xy$, ea poſita $= a$ fiet $x = \frac{a}{4y}$. Hic jam irrationalitas evitatur, & aſſumpto pro y, quovis numero integro, vel fracto, habebitur x, & ejus ope $x + y$, & $x - y$.

591. Sit numerus propoſitus $a = 40$, capiatur $y = 10$ erit $\frac{a}{4y} = \frac{40}{40} = 1 = x$. Quare $x + y = 11$, $x - y = -9$, cujus quadratum cum ſit idem ac quadratum 9, quæſiti numeri erunt quadrata numerorum 11, & 9. Et quidem illius quadratum eſt 121, hujus 81, quorum differentia $= 40$. Si autem pro y aſſumatur 2 erit, $\frac{a}{4y} = \frac{40}{8} = 5$, adeoque $x + y = 7$, $x - y = 3$, & quadrati numeri 49, ac 9 quorum differentia 40. Si pro y ponatur 3, erit $\frac{a}{4y} = \frac{10}{3}$, adeoque $x + y = \frac{10}{3} + 3 = \frac{19}{3}$, $x - y = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$, quorum quadrata $\frac{361}{9}$ & $\frac{1}{9}$, ac eorum differentia $\frac{360}{9}$ $= 40$.

592. Patet autem, ſi integri præterea numeri requirantur, oportere ut numerus datus a, ſit diviſibilis per 4, tum ut quoti $\frac{a}{4}$ ſumatur diviſor aliquis pro y, quod quidem formula illa exhibere non potuit, quæ numeri a diviſores nequaquam exprimit. Porro cum in ſuperiore exemplo ſit $\frac{a}{4} = 10$, & numerus 10 habeat

divi-

diviſores tantummodo 1, 2, 5, 10, patet integros numeros haberi non poſſe, niſi pro y aſſumatur quipiam ex iis.

593. In illa etiam formula $\sqrt{a+y^2}$ potuiſſet evitari irrationalitas hoc artificio. Ponatur $y = z - \frac{a}{4z}$, & erit $y^2 = z^2 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{16z^2}$. Quare $a+y^2 = z^2 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{16z^2}$, cujus radix $z + \frac{a}{4y}$. Aſſumatur igitur pro z valor quivis, tum pro x valor $z + \frac{a}{4z}$, pro y valor $z - \frac{a}{4z}$, & erit factum. Si fiat $z = 10$, erit $z + \frac{a}{4z} = 11$, $z - \frac{a}{4z} = 9$, ſi aſſumatur $z=2$, erit $z + \frac{a}{4z} = 7$, $z - \frac{a}{4z} = -3$ adeoque quadrati numeri quęſiti in priore caſu 121 & 81, in poſteriore 49 & 9, ut prius.

594. At ſi quęrantur bini numeri quadrati, quorum ſumma æquetur numero dato, æquatio erit $x^2 + y^2 = a$, ſive $x = \sqrt{a - y^2}$, quę nullo artificio reducitur. Priore methodo pro differentia adhibito, poſita radice prioris $x+y$ habeantur quadrata $x^2 + 2xy + y^2$, & $x^2 - 2xy + y^2$, quorum ſumma $2x^2 + 2y^2$ ſi fiat $= a$, erit $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a$, ac redit illud idem, quod vitabatur. Si autem fiat $y = z + \frac{a}{4z}$, fit $a - y^2 = -z^2 + \frac{a}{2}$

$-\frac{a^2}{16z^2} = -(z-\frac{4}{az})^2$, quadratum nimirum negativo ſigno affectum, cujus radix imaginaria.

595. Quod ſi numerus datus ſit quadratus, adeoque $x^2+y^2=a^2$, $x^2=a^2-y^2$, $x=\sqrt{a^2-y^2}$, poſſent quidem evitari ſigna negativa, poſito $z+\frac{y^2}{4z}=a$, unde haberetur $a^2-y^2=z^2-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{16zz}$, & $x=\sqrt{a^2-y^2}=z-\frac{yy}{4z}$. Sed ex æquatione $z+\frac{y^2}{4z}=a$ haberetur $4z^2+y^2=4az$, ac $z^2-az=\frac{1}{4}y^2$, $z^2-az+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}y^2$, $z-\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-y^2}$ quod queſtionem eodem reducit, unde diſceſſerat; nec ullo artificio obtinetur intentum.

596. Solum ſi querantur bina quadrata, quorum ſumma ſit numerus quadratus, infinite ſolutiones haberi poterunt. Aſſumpto enim quovis numero quadrato u^2, inveniantur, per num. 590, alii bini x^2 y^2, quorum differentia equetur huic, & erit $x^2-y^2=u^2$, adeoque $x^2=u^2+y^2$, quod querebatur.

597. Plurima hujuſmodi problemata proponi poſſunt, quæ ad numerorum poteſtates, & poteſtatum ſummas, vel differentias pertinent, in quibus curandum diverſarum ſubſtitutionum ope, ut vel ipſe potentiæ elimi-

minentur, vel acquirantur formulę, quæ radices habeant extrahibiles. Sed exempla allata ad quandam methodi ideam ſint ſatis.

598. Plurium indeterminatarum æquationum ope determinata quoque problemata ſolvuntur, ut diximus num. 188, ubi tot ſunt æquationes, quot incognitæ quantitates. Plures methodi ab hoc artificio pendent, ut ex: gr: methodus, quam vocant alligationis in Arithmetica. Habeat quis binas maſſas compoſitas ex auro ſimul, & argento ita, ut quavis libra primę maſſę contineantur uncię auri numero a, argenti numero b, in ſecunda unciæ auri numero d, argenti numero e. Quæratur quot unciæ pro ſingulis libris ſingularum maſſarum ſumendę ſint, ut fiat nova maſſa, in qua pro quavis libra contineantur auri uncię l, argenti m.

599. Dicatur numerus unciarum primę maſſę x, ſecundę y, numerus unciarum unius librę, ſive $12 = t$. Erit ut libra t ad partem aſſumptam x, ita numerus a, unciarum auri contentarum in prima maſſa, ad numerum contentarum in maſſa nova, & pariter, ut libra t ad partem ſecundę maſſę y, ita numerus d, unciarum auri contentarum in ſecunda maſſa, ad numerum earumdem in nova, qui bini numeri unciarum auri analyticè inventi debent poni ęquales numero illi dato l unciarum ejuſdem, quę debent haberi in nova maſſa. Eo pacto obtinetur una æquatio. Eodem modo ope unciarum argenti obtinetur ſecunda, ac earum ope inveniuntur quęſiti valores x, & y, & ſolvitur problema. En calculi ſpecimen.

Pro quavis libra $= t$

	auri	argenti
eſt in maſſa 1.ª	a	b
in 2.ª	d	e
debet eſſe in 3.ª	l	m

Erit

Erit $t . x :: a . \frac{ax}{t}$ $\qquad t . x :: b . \frac{bx}{t}$

$t . y :: d . \frac{dy}{t}$ $\qquad t . y :: e . \frac{ey}{t}$

$\frac{ax}{t} + \frac{dy}{t} = l$ $\qquad \frac{bx}{t} + \frac{ey}{t} = m$

$ax + dy = tl$ $\qquad bx + ey = tm$

$ax = tl - dy$ $\qquad bx = tm - ey$

$x = \frac{tl - dy}{a}$ $\qquad x = \frac{tm - ey}{b}$

$$\frac{tl - dy}{a} = \frac{tm - ey}{b}$$

$$btl - bdy = atm - aey$$

$$aey - bdy = atm - btl$$

$$y = t \times \frac{am - bl}{ae - bd}$$

600. Invento y, jam habetur & x in formula $\frac{tl - dy}{a}$, vel $\frac{tm - ey}{b}$. Sed formula invenſa pro y admodum facile aptatur ipſi x, ſi notetur, quod erant a, & b reſpectu x, eſſe d, & e reſpectu y, adeoque ſi in illa formula ponantur hi valores pro illis, & illi pro his habebitur $x = t \times \frac{dm - el}{db - ae}$.

601. Sint exempli gratia in prima maſſa unciæ auri 10, argenti 2. In ſecunda auri 4, argenti 8, debeant eſſe in tertia auri 9 argenti 3. Diſtribuantur numeri ut ſupra,

Pro quavis libra

	auri	argenti
erat in maſſa 1.	10.	2
in 2.	4.	8
debet eſſe in 3.	9.	3

Capiendum ex 1.ª $x = 12 \times \frac{4 \times 3 - 8 \times 9}{4 \times 2 - 10 \times 8} = 12 \times \frac{12 - 72}{8 - 80} = 10$

ex 2.ª $y = 12 \times \frac{10 \times 3 - 2 \times 9}{10 \times 8 - 2 \times 4} = 12 \times \frac{30 - 18}{80 - 8} = 2$

602. Patet autem in parte primæ maſſæ fore auri uncias $\frac{10 \times 10}{12} = \frac{100}{12}$, argenti $\frac{10 \times 2}{12} = \frac{20}{12}$, in parte ſecundæ, auri $\frac{2 \times 4}{12} = \frac{8}{12}$, argenti $\frac{2 \times 8}{12} = \frac{16}{12}$ adeoque fore in maſſa nova auri $\frac{108}{12} = 9$, argenti $\frac{36}{12} = 3$, ut oportebat.

603. Quin immo canon etiam generalis erui poteſt hoc pacto. Quæris quid debeas capere ex una maſſa? Pone in prima linea numeros auri, & argenti pertinentes ad alteram, in ſecunda numeros pertinentes ad illam ipſam, in tertia numeros pertinentes ad novam. Duc primum numerum primæ lineæ in ſecundum tertiæ, & ſecundum primæ in primum tertiæ, ac hoc productum ſubduc ab illo, & reſiduum ſerva pro fractionis cujuſdam numeratore. Duc primum primæ in ſecundum ſecundæ, & ſecundum primæ, in primum ſecundæ, & hoc productum ſubduc ab illo, ac reſiduum ſume pro denominatore. Fractionem ejuſmodi duc in 12, & habebis intentum. Patet enim id ipſum factum eſſe in formula $y = t \times \frac{am - bl}{ae - bd}$.

604. At

604. At hic ſæpe illud accidet, quod ſupra monueramus, ut negativi valores problema evertant. *Si* in prima maſſa ſint auri unciæ 10, argenti 2, in ſecunda auri 9, argenti 3; & in tertia debeant eſſe auri 8 argenti 4; obveniet quidem

$$y = 12 \times \frac{40-16}{12} = 24,$$

poſitivi valoris, at

$$x = 12 \times \frac{36-24}{18-30} = -12,$$

negativi, quorum utrumque oſtendit problema, ut proponitur, eſſe impoſſibile, cum nimirum ex 12 unciis accipi non poſſint 24, nec negativus numerus unciarum addi, niſi ſubtrahendo. Oſtendit autem ejuſmodi ſolutio, ad obtinendum quod proponitur opportere aſſumere 24 uncias ſecundæ maſſæ, & ex iis demere 12 uncias maſſæ ſimilis primæ, quæ quod tamen obtineri non poteſt, cum ex ſecunda maſſa non poſſit demi pars primæ ſimilis metallorum ibi permixtorum. Id autem ſemper continget, ubi ratio auri ad argentum in nova maſſa fuerit aut major, aut minor, quam in utraque ex datis. Nam debet eſſe intermedia.

605. Similis eſt methodus, ſi plura ſimul permixta ſint metalla in ſingulis maſſis, & totidem requirantur maſſæ datæ, quot metalla permiſcentur: ac totidem æquationes obtinentur, adeoque calculus evadit multo operoſior. Plures aliæ methodi eodem artificio deteguntur, & canones pro iis eruuntur generales, ut interpolationis methodus, ac methodus reverſionis ſerierum, & aliæ plures, de quibus agemus, ubi de ſeriebus. Interea notetur & illud ex generali problematum ſolutione oriri theoremata, ac canones generales, ſi ultima illa ſolutionis concluſio ex algebraico ſermone in vulgarem transferatur, uti factum eſt num. 603.

606. Atque hæc quidem Tyroni abunde ſunt, qui ſi ſe in his diligenter exercuerit, haud difficulter ſublimiora per ſe ipſe vel inveniet, vel apud Auctores paſſim occurrentia intelliget.

EXPLICIT TOMI I. PARS II.

INDEX.

PARAGRAPHORUM.

§. I. *De notatione.* Pag. 7
II. *De primis operationibus calculi litteralis quantitatibus unico termino conſtantibus.* 11
III. *De iiſdem operationibus in quantitatibus conſtantibus pluribus terminis.* 19
IV. *De potentiis, quantitatum conſtantium pluribus terminis.* 32
V. *De radicibus earundem.* 39
VI. *De applicatione earundem formularum ad extractionem radicum in numeris.* 45
VII. *De generalibus æquationum proprietatibus.* 59
VIII. *De variis æquationum generibus.* 69
IX. *De ſolutione æquationum determinatarum primi, & ſecundi gradus.* 75
X. *De natura, & variis proprietatibus æquationum determinatarum.* 89
XI. *De transformationibus quibuſdam earundem æquationum.* 98
XII. *De æquationibus tertii gradus.* 109
XIII. *De reſolutione æquationum gradus quarti.* 149
XIV. *De radicum limitibus, & mutationibus valoris formulæ orti ex diverſis ſubſtitutionibus factis pro quanti-*